Sveučilište u Zagrebu
Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije

Miroslav Jerković
Ivica Gusić

Matematika 1

Nastavni materijal

Zagreb 2022.

SADRŽAJ

1 REALNI I KOMPLEKSNI BROJEVI 1
1.1 Pripadni problem 1
1.2 Potrebno predznanje 1
1.2.1 Poznavanje osnovnih skupova brojeva i operacija s njima 1
1.2.2 Decimalni zapis realna broja 2
1.2.3 Znanstveni zapis (notacija) realna broja 2
1.2.4 Skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ 3
1.2.5 Algebarske operacije s brojevima 3
1.2.6 Geometrijsko predočavanje brojeva 4
1.2.7 Apsolutna vrijednost broja 5
1.2.8 Uspoređivanje brojeva 6
1.2.9 Geometrijsko predočavanje umnoška realnog i kompleksnog broja 6
1.2.10 Geometrijsko predočavanje zbroja i razlike kompleksnih brojeva 7
1.3 Nove definicije i tvrdnje 9
1.3.1 Trigonometrijski prikaz kompleksna broja 9
1.3.2 Geometrijska interpretacija brojeva $\cos\alpha + i \sin\alpha$: jedinična kružnica 12
1.3.3 Geometrijska interpretacija potenciranja na jediničnoj kružnici - Moivreova formula 14
1.3.4 Množenje kompleksnih brojeva na jediničnoj kružnici 16
1.4 Primjena MATLAB-a 18
1.4.1 Računanje s kompleksnim brojevima. Naredbe `complex`, `real` i `imag`, `abs` i `angle` 18
1.4.2 Geometrijski prikaz kompleksnog broja. Naredbe `plot` i `polarplot` 18
1.5 Pitanja i zadatci 21

2 REALNI VEKTORSKI PROSTOR 22
2.1 Pripadni problem 22
2.2 Potrebno predznanje 22
2.2.1 Geometrijsko uvođenje vektora u ravninu i prostor 22
2.2.2 Množenje vektora brojem (skalarom) 24
2.2.3 Zbrajanje vektora 24
2.2.4 Kut među vektorima 26
2.3 Nove definicije i tvrdnje s primjerima 26
2.3.1 Koordinatni sustav u prostoru 26
2.3.2 Koordinatni sustav u n-dimenzionalnom prostoru 28

2.3.3 Jedinični vektori 29
2.3.4 Jedinični vektori u n-dimenzionalnom prostoru 29
2.3.5 Radijus vektori - analitički prikaz vektora u koordinatnom prostoru 30
2.3.6 Formula za duljinu vektora 31
2.3.7 Algebarske operacije s vektorima u koordinatnom sustavu 32
2.3.8 Analitički prikaz i duljina vektora 33
2.3.9 Kriterij kolinearnosti vektora 33
2.4 Primjena MATLAB-a 34
2.4.1 Računanje s vektorima. Naredbe `norm` i `vecnorm` 34
2.4.2 Geometrijski prikaz vektora. Naredba `quiver3` . 35
2.5 Pitanja i zadatci 36

3 TRANSFORMACIJE RAVNINE I PROSTORA 38
3.1 Pripadni problem 38
3.2 Potrebno predznanje 38
3.3 Nove definicije i tvrdnje s primjerima 40
3.3.1 Analitički zapis translacije prostora ili ravnine . 40
3.3.2 Analitički zapis rotacije ravnine 40
3.3.3 Kvadratna matrica 43
3.3.4 Analitički zapis centralne simetrije prostora ili ravnine 43
3.3.5 Analitički zapis osne simetrija prostora ili ravnine 44
3.3.6 Analitički zapis simetrije prostora s obzirom na ravninu 45
3.3.7 Analitički zapis projekcije prostora ili ravnine . 45
3.3.8 Analitički zapis rotacije prostora 46
3.3.9 Pojam matrice i linearnog operatora 46
3.3.10 Vrste matrica i pripadajućih linearnih operatora 48
3.4 Primjena MATLAB-a 49
3.4.1 Zapis i geometrijski prikaz transformacija ravnine 49
3.4.2 Zapis i geometrijski prikaz transformacija prostora. Naredba `plot3` 50
3.4.3 Zadavanje nekih specijalnih matrica. Naredbe `zeros`, `eye`, `diag` i `transpose` 51
3.5 Pitanja i zadatci 53

4 ALGEBRA MATRICA. DETERMINANTA 54
4.1 Pripadni problem 54
4.2 Potrebno predznanje 54
4.3 Nove definicije i tvrdnje s primjerima 54
4.3.1 Zbrajanje matrica 54
4.3.2 Množenje matrica 55
4.3.3 Inverzni element za množenje matrica - inverzna matrica 56
4.3.4 Determinanta 58

4.3.5 Formula za računanje inverzne matrice 60
4.4 Primjena MATLAB-a 63
4.4.1 Zadavanje matrica i računanje s njima 63
4.4.2 Determinanta, adjungirana i inverzna matrica. Naredbe det, adjoint i inv 64
4.4.3 Zadavanje simboličkih veličina. Naredba syms . 65
4.5 Pitanja i zadatci 66

5 SKALARNI, VEKTORSKI I MJEŠOVITI UMNOŽAK VEKTORA 68
5.1 Pripadni problem 68
5.2 Potrebno predznanje 68
5.3 Nove definicije i tvrdnje s primjerima 68
5.3.1 Skalarni umnožak vektora 68
5.3.2 Vektorski umnožak vektora 71
5.3.3 Mješoviti umnožak vektora 74
5.4 Primjena MATLAB-a 76
5.4.1 Skalarni umnožak vektora i kut među vektorima. Naredba dot 76
5.4.2 Vektorski umnožak vektora. Naredba cross . . 76
5.4.3 Mješoviti umnožak vektora 76
5.5 Pitanja i zadatci 77

6 LINEARNI SUSTAVI I NJIHOVO RJEŠAVANJE 79
6.1 Pripadni problem 79
6.2 Potrebno predznanje 79
6.3 Nove definicije i tvrdnje s primjerima 79
6.3.1 Pojam linearnog sustava 79
6.3.2 Matrični zapis sustava 81
6.3.3 Regularni sustav i njegovo rješavanje 82
6.3.4 Rješavanje neregularnih sustava 85
6.3.5 Algoritam za računanje determinante 86
6.3.6 Metoda za određivanje inverzne matrice 87
6.4 Primjena MATLAB-a 89
6.4.1 Zadavanje i rješavanje linearnog sustava. Naredba solve 89
6.4.2 Matrični zapis i matrično rješavanje sustava. Naredbe equationsToMatrix i linsolve 89
6.4.3 Rješavanje regularnog sustava 90
6.4.4 Rješavanje neregularnog sustava 90
6.5 Pitanja i zadatci 91

7 SVOJSTVENE VRIJEDNOSTI I SVOJSTVENI VEKTORI 93
7.1 Pripadni problem 93
7.2 Potrebno predznanje 93
7.3 Nove definicije i tvrdnje s primjerima 96
7.3.1 Svojstvena vrijednost i svojstveni vektor matrice 96
7.3.2 Metoda određivanja svojstvenih vrijednosti . . . 101

7.4 Primjena MATLAB-a 103
7.4.1 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori. Naredba `eig` 103
7.4.2 Karakteristični polinom. Naredbe `charpoly`, `roots` i `poly` 105
7.5 Pitanja i zadatci 105

8 POJAM FUNKCIJE, GRAFA I INVERZNE FUNKCIJE 107
8.1 Pripadni problem 107
8.2 Potrebno predznanje 107
8.3 Nove definicije i tvrdnje s primjerima 107
8.3.1 Primjeri zavisnih veličina 107
8.3.2 Pravilo prema kojem su povezane dvije veličine 110
8.3.3 Pojam funkcije 111
8.3.4 Graf funkcije 112
8.3.5 Očitavanje vrijednosti funkcije iz grafa funkcije 114
8.3.6 Očitavanje svojstava funkcije iz grafa funkcije . 115
8.3.7 Grafičko rješavanje jednadžba - inverzna funkcija 117
8.4 Primjena MATLAB-a 119
8.4.1 Zadavanje funkcija i rad s njima. Naredbe `@`, `function`, `feval` i `fplot` 119
8.4.2 Određivanja nultočaka funkcije. Naredba `fzero` 120
8.4.3 Simboličko zadavanje funkcije. Naredba `syms` . 121
8.4.4 Određivanje nultočaka simbolički zadane funkcije. Naredbe `solve` i `vpasolve` 121
8.5 Pitanja i zadatci 123

9 ELEMENTARNE FUNKCIJE I NJIHOVE PRIMJENE 124
9.1 Pripadni problem 124
9.2 Potrebno predznanje 124
9.2.1 Linearna funkcija - linearna veza među veličinama 125
9.2.2 Kvadratna funkcija. Potencije 126
9.2.3 Inverzna funkcija i inverzna veza među veličinama 128
9.2.4 Eksponencijalna i logaritamska funkcija 131
9.2.5 Inverzne funkcije i rješavanje jednadžba 135
9.3 Nove definicije i tvrdnje s primjerima 135
9.3.1 Trigonometrijske funkcije i arkus funkcije 135
9.4 Primjena MATLAB-a 143
9.4.1 Popis naredaba za matematičke funkcije. Naredbe `power`, `sqrt`, `nthroot`, `exp`, `log`, `log2`, `log10`, `sin`, `cos`, `tan`, `cot`, `asin`, `acos`, `atan` i `acot` 143
9.4.2 Inverzna funkcija. Naredba `finverse` 144
9.4.3 Kompozicija funkcija. Naredba `compose` 145
9.4.4 Zapis funkcijske veze među veličinama 146
9.4.5 Zadavanje vektora vrijednosti varijable. Naredba `linspace` 147

9.5 Pitanja i zadatci 148

10 POJAM DERIVACIJE, GEOMETRIJSKO I FIZIKALNO ZNAČENJE 149
10.1 Pripadni problem 149
10.2 Potrebno predznanje 149
10.3 Nove definicije i tvrdnje s primjerima 150
10.3.1 Pojam prirasta neke veličine, prirasta argumenta funkcije i prirasta funkcije 150
10.3.2 Relativni prirast funkcije, prosječna brzina promjene 152
10.3.3 Brzina promjene funkcije, derivacija funkcije u točki 153
10.3.4 Definicija derivacije funkcije u točki 155
10.3.5 Jednadžba tangente na graf funkcije 156
10.3.6 Definicija derivacije funkcije 156
10.4 Primjena MATLAB-a 157
10.4.1 Prirast i relativni prirast funkcije u točki 157
10.4.2 Računanje limesa funkcije. Naredba `limit` . . . 158
10.5 Pitanja i zadatci 159

11 SVOJSTVA DERIVACIJA. DERIVACIJE ELEMENTARNIH FUNKCIJA 161
11.1 Pripadni problem 161
11.2 Potrebno predznanje 161
11.3 Nove definicije i tvrdnje s primjerima 162
11.3.1 Derivacija potencije i polinoma. Svojstva derivacija funkcija 162
11.3.2 Derivacija trigonometrijskih funkcija 165
11.3.3 Derivacija eksponencijalne funkcije. Derivacija složene funkcije 167
11.3.4 Derivacija inverzne funkcije. Derivacija logaritamske funkcije, arkus funkcija i korijena 168
11.3.5 Tablica značajnih derivacija 170
11.4 Primjena MATLAB-a 170
11.4.1 Računanje derivacija. Naredba `diff` 170
11.4.2 Deriviranje simbolički zadanih funkcija 171
11.5 Pitanja i zadatci 172

12 APROKSIMACIJA FUNKCIJE. TAYLOROV RED 174
12.1 Pripadni problem 174
12.2 Potrebno predznanje 174
12.3 Nove definicije i tvrdnje s primjerima 175
12.3.1 Linearna aproksimacija funkcije 175
12.3.2 Kvadratna aproksimacija funkcije 178
12.3.3 Aproksimacije višeg reda 180
12.3.4 Taylorov red - razvoj funkcije 183
12.4 Primjena MATLAB-a 189
12.4.1 Taylorov polinom. Naredba `taylor` 189

12.4.2 Linearna i kvadratna aproksimacija funkcije . . 190
12.4.3 Aproksimacije višeg reda 191
12.5 Pitanja i zadatci 192

13 ANALIZA SVOJSTAVA FUNKCIJE POMOĆU DERIVACIJA 194
13.1 Pripadni problem 194
13.2 Potrebno predznanje 195
13.3 Nove definicije i tvrdnje s primjerima 198
13.3.1 Kriteriji rasta i pada 198
13.3.2 Kriteriji konveksnosti i konkavnosti 201
13.3.3 Izravni kriteriji lokalnog ekstrema 202
13.3.4 Fizikalna značenja lokalnih ekstrema, druge derivacije i točaka infleksije 205
13.4 Primjena MATLAB-a 207
13.4.1 Pronalaženje lokalnih ekstrema funkcije na zadanom intervalu. Naredba `fminbnd` 207
13.4.2 Intervali rasta i pada, konveksnosti i konkavnosti te kritične točke za simbolički zadane funkcije. Naredba `solve` 207
13.4.3 Lokalni ekstremi kod funkcijskih veza. Naredbe `islocalmin` i `islocalmax` 208
13.5 Pitanja i zadatci 209

KAZALO 211

KAZALO 216

1 REALNI I KOMPLEKSNI BROJEVI

U lekciji se ponavljaju osnovna svojstva brojeva, pojmovi vezani uz brojeve i operacije s brojevima. Obrađuje se trigonometrijski prikaz kompleksnog broja.

1.1 PRIPADNI PROBLEM

Brojevima se rješavaju dva temeljna praktična problema:

> **brojenje, prebrojavanje** - pomoću prirodnih brojeva
>
> **mjerenje** - pomoću realnih brojeva

Iako kompleksni brojevi imaju i fizikalnu i geometrijsku primjenu, oni su ponajprije uvedeni iz teoretskih razloga - da bi svaka algebarska jednadžba imala rješenje.

1.2 POTREBNO PREDZNANJE

1.2.1 Poznavanje osnovnih skupova brojeva i operacija s njima

Skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$
Primjeri: $1, 2, 3, \ldots, 25, \ldots$

Skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$
Primjeri: $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots$
Svaki je prirodni broj ujedno i cio, međutim, ima cijelih brojeva koji nisu prirodni - to su negativni cijeli brojevi i broj 0.

Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$
Primjeri: $\frac{1}{2}, \frac{2}{25}, -\frac{2}{3}, \frac{17}{12}, \ldots$.
Općenito, broj je racionalan ako se može predočiti kao razlomak s cjelobrojnim brojnikom i nazivnikom. Svaki je cijeli broj (dakle i prirodni) ujedno i racionalan, međutim, ima racionalnih brojeva koji nisu cijeli. Na primjer, $\frac{1}{2}$ je racionalan, ali nije cio broj.

Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$
Skup kojeg čine racionalni i **iracionalni** brojevi.
Primjeri:

$$1,\ 0,\ -7,\ \frac{2}{5},\ \pi,\ \sqrt{2},\ \sqrt[5]{6},\ \ldots$$

Svaki je racionalni broj (dakle i cijeli, prirodni) ujedno i realan, međutim, ima realnih brojeva koji nisu racionalni. Na primjer, π, $\sqrt{2}$ i $\sqrt[5]{6}$ nisu racionalni već iracionalni jer se ne mogu predočiti kao razlomak s cjelobrojnim brojnikom i nazivnikom.
Intuitivno, pozitivni realni brojevi jesu brojevi kojima se može izmjeriti svaka dužina.

1.2.2 Decimalni zapis realna broja

Primjeri: 3.14, 3.16, 1.732, $-2.1313\ldots$, $\ldots$ - prva tri su konačni, a četvrti je beskonačan.
Svaki konačan **decimalni zapis** može se shvatiti i kao beskonačan. Na primjer,

$$0.5 = 0.5000\ldots,\ 0.08 = 0.08000\ldots$$

Ima brojeva koji nemaju konačan decimalni zapis, primjerice, broj sa zapisom $-2.1313\ldots$.
Racionalni brojevi imaju konačan ili beskonačan **periodan** decimalni zapis. Na primjer:

$$\frac{1}{2} = 0.5,\ \frac{2}{25} = 0.08,\ -\frac{2}{3} = -0.666\ldots, \frac{17}{12} = 1.41666\ldots, -\frac{211}{99} = -2.1313\ldots$$

Iracionalni brojevi imaju beskonačan **neperiodan** zapis.
Na primjer, broj 1.010010001..., kojem se broj nula u decimalnom zapisu između dviju jedinica povećava za jedan, je neperiodan pa je to zapis iracionalna broja.
Često se umjesto *decimalni zapis* govori *decimalni broj*. Ako se to prihvati, onda je skup realnih brojeva upravo skup decimalnih brojeva.

1.2.3 Znanstveni zapis (notacija) realna broja

To je zapis pomoću potencije broja 10. Ovaj zapis je naročito pogodan za vrlo velike i vrlo male brojeve.

Primjer 1.1. [Znanstveni zapis realna broja]
Lijevo je običan decimalni zapis, a desno znanstveni:
$3752.6 = 3.7526 \cdot 10^3$
$375.26 = 3.7526 \cdot 10^2$
$37.526 = 3.7526 \cdot 10^1$
$3.7526 = 3.7526 \cdot 10^0$
$0.37526 = 3.7526 \cdot 10^{-1}$
$0.0000375.26 = 3.7526 \cdot 10^{-5}$. □

U decimalnom zapisu nekog broja prva znamenka različita od nule zove se i *prva značajna znamenka*. Treba uočiti njeno značenje pri određivanju znanstvenog zapisa.

1.2.4 Skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$

Primjeri:

$$2+3i, 2-3i, \sqrt{2}i, i, ...,$$

gdje je i **imaginarna jedinica** za koju vrijedi

$$i^2 = -1.$$

Imaginarna jedinica nije realan broj, naime kvadrat realnog broja ne može biti negativan.
Svaki se kompleksni broj može zapisati kao $a+bi$ i taj se zapis često naziva **algebarskim zapisom**. Tu je a **realni dio**, a b **imaginarni dio**. Algebarski zapis kompleksna broja je jedinstven. Ta se vrlo važna činjenica kraće može zapisati kao:

$$\text{Ako je } a+bi = c+di, \text{ onda je } a = c \text{ i } b = d.$$

Broj oblika bi je **čisto imaginaran**, primjerice, $3i$, $\sqrt{2}i$, ...
Brojevi $a+bi$ i $a-bi$ međusobno su **kompleksno konjugirani**. Na primjer, brojevi $2+3i$ i $2-3i$ su kompleksno konjugirani, također i brojevi $2i$ i $-2i$. Kompleksno konjugirani broj broja z označavamo s crticom iznad z, dakle $\bar{z}$.
Svaki je realni broj (dakle i racionalni, cijeli, prirodni) ujedno i kompleksan s imaginarnim dijelom jednakim nuli. Međutim, ima kompleksnih brojeva koji nisu realni - to su upravo oni kojima je imaginarni dio različit od nule.

1.2.5 Algebarske operacije s brojevima

Poznato je da se realni brojevi mogu zbrajati i množiti te da operacije zbrajanja i množenja imaju određena svojstva. Pritom su zbroj i umnožak racionalnih brojeva opet racionalni brojevi, a slično je za cijele i prirodne brojeve. Oduzimanje možemo shvatiti kao zbrajanje sa **suprotnim brojem**:

$$a - b = a + (-b),$$

a dijeljenje kao množenje s **recipročnim brojem**:

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b}.$$

S nulom se ne može dijeliti! Drugim riječima, nula ne može biti nazivnik nekog razlomka.
Kompleksni se brojevi **zbrajaju** i **oduzimaju** prema pravilu: *realan s realnim, imaginaran s imaginarnim*. Dakle:

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i.$$

Na primjer:

$$(2+3i)+(4-5i)=6-2i$$
$$(2+3i)-(4-5i)=-2+8i.$$

Kompleksni se brojevi **množe** prema pravilu *svaki sa svakim*, a pritom se koristi činjenica da je $i^2=-1$. Dobije se:

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Na primjer:

$$(2+3i)(4-5i)=23+2i.$$

Množenje realnog i kompleksnog broja je jednostavnije:

$$\lambda(a+bi)=(\lambda a)+(\lambda b)i.$$

Na primjer:

$$5(2+3i)=10+15i.$$

Dijeljenje se svodi na množenje proširivanjem s konjugiranim nazivnikom. Na primjer:

$$(2+3i):(4-5i)=\frac{2+3i}{4-5i}=\frac{2+3i}{4-5i}\cdot\frac{4+5i}{4+5i}=\frac{-7+22i}{41}=-\frac{7}{41}+\frac{22}{41}i.$$

Pri množenju nazivnika primijenili smo formulu za razliku kvadrata:

$$(4-5i)(4+5i)=4^2-(5i)^2=16-(-25)=41.$$

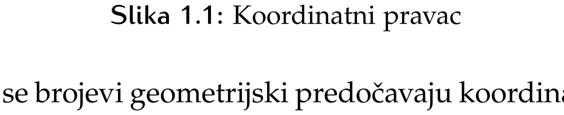
Za množenje kompleksno-konjugiranih brojeva vrijedi i općenito:

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$$

Vidimo da je rezultat uvijek pozitivan, osim ako je $a=b=0$.

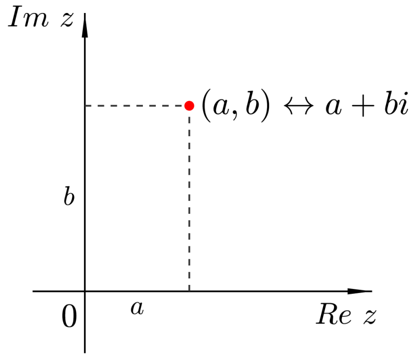
1.2.6 Geometrijsko predočavanje brojeva

Realni se brojevi geometrijski predočavaju **brojevnim (koordinatnim) pravcem**. To je pravac na kojemu su istaknute dvije točke. Jedna odgovara broju 0, to je **ishodište koordinatnog sustava**, a druga broju 1. Time je određena **jedinična duljina** - udaljenost od broja 0 do broja 1 na pravcu. Pri ovom predočavanju svakoj točki pravca odgovara točno jedan realan broj kojeg zovemo **koordinata točke** i svakom realnom broju točno jedna točka pravca (Slika 1.1).



Slika 1.1: Koordinatni pravac

Kompleksni se brojevi geometrijski predočavaju koordinatnom ili **kompleksnom ravninom** tako da se kompleksni broj $z=a+bi$ poistovjeti s *uređenim parom* realnih brojeva (a, b), a taj uređeni par s točkom koordinatne ravnine (Slika 1.2). Pritom su realni brojevi, kao i prije, predočeni pravcem koji zovemo **realna os** i označavamo s $\mathrm{Re}\, z$, a čisto imaginarni pravcem (okomitim na taj pravac) koji zovemo **imaginarna os** i označavamo s $\mathrm{Im}\, z$. Broj 0 je u ishodištu koordinatnog sustava, u presjeku realni i imaginarne osi.

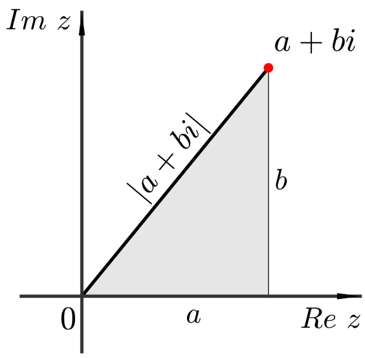


Slika 1.2: Kompleksna ravnina

1.2.7 Apsolutna vrijednost broja

Apsolutna vrijednost $|a|$ realnog broja a je udaljenost tog broja od nule na brojevnom pravcu. Na primjer: $|2| = 2$, $|-2| = 2$, $|0| = 0$. Općenito je $|a| = |-a|$, tj. uvijek po dva broja, broj i njemu suprotni broj, imaju istu apsolutnu vrijednost. Izuzetak je broj 0, ali to na neki način vrijedi i za nju jer je nula sama sebi suprotna.
Slično je za kompleksne brojeve: **apsolutna vrijednost** ili **modul** $|a + bi|$ kompleksnog broja $a + bi$ je njegova udaljenost od ishodišta u kompleksnoj ravnini. Vidimo iz Pitagorina poučka (Slika 1.3) da je

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Slika 1.3: Apsolutna vrijednost kompleksnog broja

Na primjer: $|3 + 4i| = 5$, $|2 + 3i| = \sqrt{13}$, $|3i| = 3$.
Vidimo da vrijedi $|a + bi| = \sqrt{(a + bi)(a - bi)}$, kraće

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Kao poseban slučaj **formule za apsolutnu vrijednost kompleksna broja** dobije se **formula za apsolutnu vrijednost realna broja**:

$$|a| = \sqrt{a^2}.$$

Naime, $|a| = |a + 0 \cdot i| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2}$.

1.2.8 Uspoređivanje brojeva

Operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja s kompleksnim brojevima imaju ista svojstva kao i operacije s realnim (odnosno racionalnim) brojevima. Jedna od važnih razlika je u tome što se realni brojevi mogu uspoređivati: za svaka dva realna broja a i b vrijedi

$$a = b \text{ ili } a < b \text{ ili } a > b$$

te dodatno $a < b$ ako je $b - a > 0$. Gornja tvrdnja za kompleksne brojeve ne vrijedi - oni se mogu uspoređivati samo po apsolutnim vrijednostima.

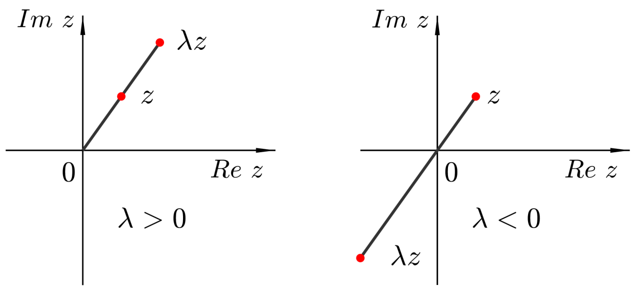
Dodatno, za realne brojeve vidimo da vrijedi (Slika 1.4):

$$a < b \text{ ako je } a \text{ lijevo od } b \text{ na brojevnom pravcu.}$$

Slika 1.4: $a < b$

1.2.9 Geometrijsko predočavanje umnoška realnog i kompleksnog broja

Kompleksan broj $z \neq 0$ i njegov umnožak λz s realnim brojem $\lambda \neq 0$ čine posebnu geometrijsku konfiguraciju (Slika 1.5): brojevi z i λz su na pravcu koji prolazi ishodištem. Pritom su oni s iste strane ishodišta ako je $\lambda > 0$, a s različitih strana ako je $\lambda < 0$.

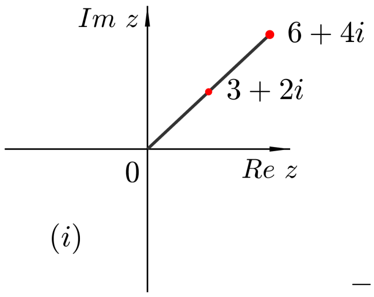


Slika 1.5: Geometrijska predodžba umnoška realnog i kompleksnog broja

Primjer 1.2. [Geometrijska konfiguracija brojeva z i λz]

(i) Brojevi $z = 3+2i$ i $2z = 6+4i$ na istoj su zraci koja počinje u ishodištu, Slika 1.6 (i).

(ii) Brojevi $z = 3+2i$ i $-2z = -6-4i$ na istom su pravcu koji prolazi ishodištem, ali s različitih strana ishodišta, Slika 1.6 (ii).



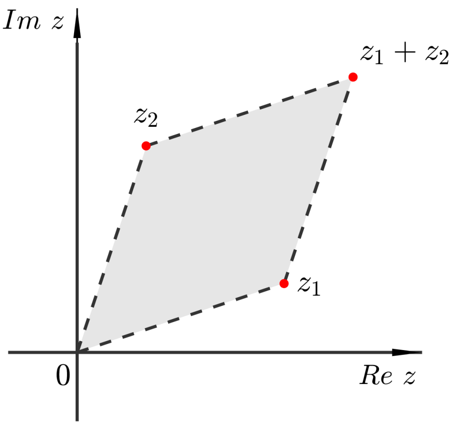
Slika 1.6: Primjer 1.2

□

Geometrijsku predodžbu umnoška i kvocijenta dvaju kompleksnih brojeva opisat ćemo poslije.

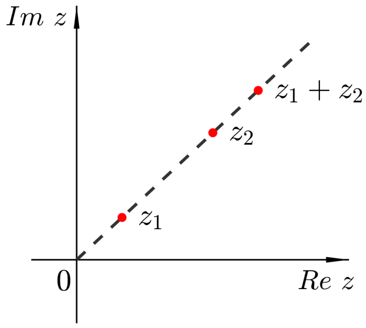
1.2.10 Geometrijsko predočavanje zbroja i razlike kompleksnih brojeva

Kompleksni brojevi z_1, z_2, $z_1 + z_2$ i 0 su vrhovi paralelograma gdje su z_1 i z_2 jedan par nasuprotnih vrhova, a 0 i $z_1 + z_2$ drugi (Slika 1.7).



Slika 1.7: Geometrijska predodžba zbrajanja kompleksnih brojeva

Izuzetak je samo ako su z_1 i z_2 na istom pravcu koji prolazi ishodištem, na primjer, ako su oba realni. Tada su sva četiri broja na istom pravcu - dobivamo degenerirani paralelogram (Slika 1.8). To je zato što je tada $z_2 = \lambda z_1$ za neki realni broj λ (gledamo slučaj kad su z_1 i z_2 različiti od nule). Zato je $z_1 + z_2 = (1+\lambda)z_1$ pa su svi brojevi na istom pravcu kroz ishodište.



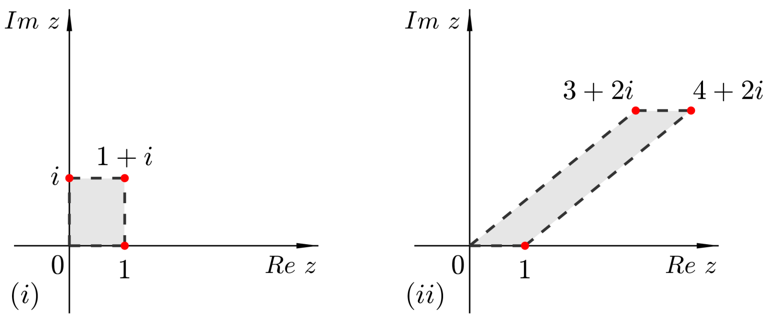
Slika 1.8: Geometrijska predodžba zbrajanja kompleksnih brojeva - specijalan slučaj

Primjer 1.3. [Geometrijska predodžba zbrajanja kompleksnih brojeva]

(i) Brojevi 1, i, $1+i$ i 0 vrhovi su kvadrata, pri čemu su 1 i i nasuprotni vrhovi, Slika 1.9 (i).

(ii) Brojevi 1, $3+2i$, $4+2i$ i 0 vrhovi su paralelograma, Slika 1.9 (ii).

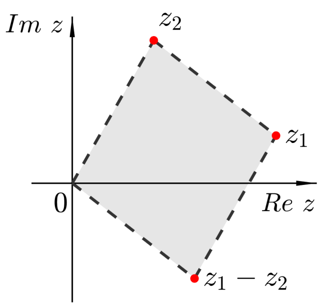
(iii) Brojevi $2+3i$, $-4-6i$, $-2-3i$ i 0 na istom su pravcu - tu je $z_2 = -2z_1$.



Slika 1.9: Primjer 1.3

□

Kompleksni brojevi z_1, z_2, $z_1 - z_2$ i 0 jesu vrhovi paralelograma. Pritom su z_1 i 0 jedan par nasuprotnih vrhova, a z_2 i $z_1 - z_2$ drugi (Slika 1.10).



Slika 1.10: Geometrijska predodžba oduzimanja kompleksnih brojeva

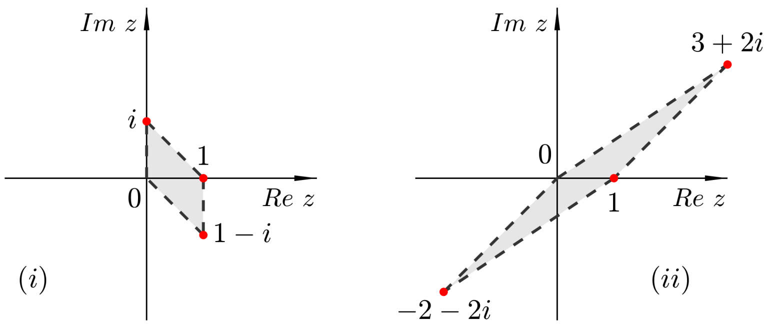
Kao i kod zbrajanja, postoje izuzeci.

Primjer 1.4. [Geometrijska predodžba oduzimanja kompleksnih brojeva]

(i) Brojevi 1, i, $1-i$ i 0 vrhovi su paralelograma pri čemu su 0 i 1 nasuprotni vrhovi, Slika 1.11 (i).

(ii) Brojevi 1, $3+2i$, $-2-2i$ i 0 vrhovi su paralelograma, Slika 1.11 (ii).

(iii) Brojevi $2+3i$, $-4-6i$, $6+9i$ i 0 na istom su pravcu.



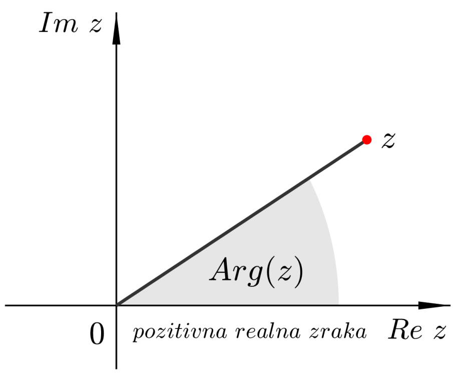
Slika 1.11: Primjer 1.4

□

1.3 NOVE DEFINICIJE I TVRDNJE

1.3.1 Trigonometrijski prikaz kompleksna broja

Neka je $z = a + bi$ kompleksan broj različit od nule. Tada spojnica broja z s ishodištem kompleksne ravnine čini kut s pozitivnom realnom zrakom. Pritom se od pozitivne realne zrake do te spojnice gibanje unutar kuta odvija suprotno gibanju kazaljke sata. Taj se kut zove **argument** ili **kut** kompleksnog broja z i označava kao $\mathrm{Arg}(z)$, Slika 1.12.



Slika 1.12: Argument kompleksnog broja

Vidimo da je

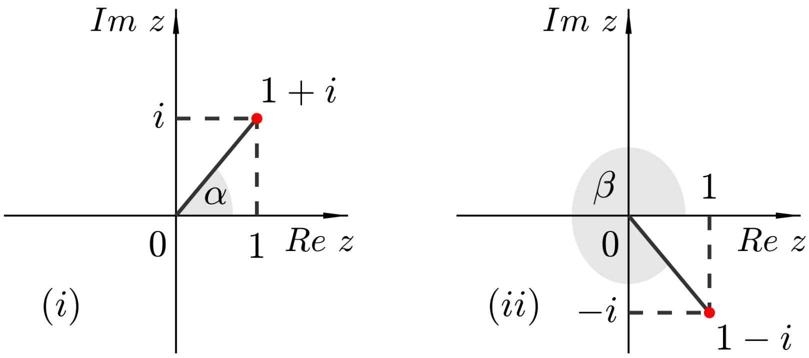
$$0 \leqslant \mathrm{Arg}(z) < 360^\circ.$$

Kad god to ne bude stvaralo zabunu, argument kompleksnog broja označavat ćemo, kako i inače označavamo mjere kuta, grčkim slovima.

Primjer 1.5. [Argument kompleksnog broja]

(i) Argument kompleksnog broja $z = 1 + i$ je $45°$. Pišemo $\mathrm{Arg}(z) = 45°$ ili $\mathrm{Arg}(1 + i) = 45°$ ili, jednostavno, $\alpha = 45°$, Slika 1.13 (i).

(ii) Argument kompleksnog broja $z = 1 - i$ je $360° - 45° = 315°$. Pišemo $\mathrm{Arg}(z) = 315°$ ili $\mathrm{Arg}(1 - i) = 315°$ ili, jednostavno, $\beta = 315°$, Slika 1.13 (ii).

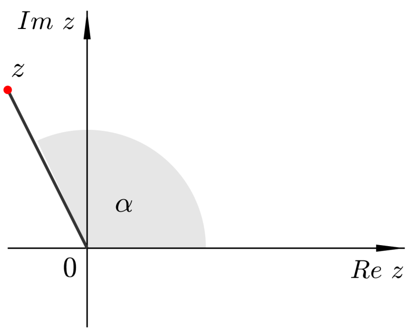


Slika 1.13: Primjer 1.5

□

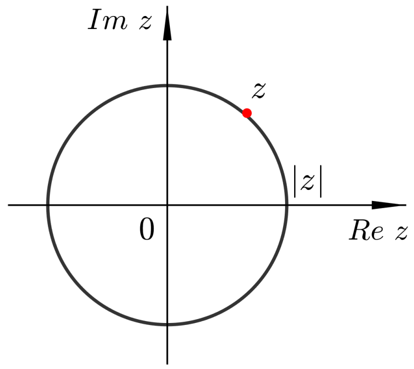
Treba uočiti sljedeće tri važne činjenice:

1. Kompleksni brojevi koji imaju isti argument kao i z čine u kompleksnoj ravnini zraku s početkom u ishodištu koja prolazi kroz z, bez samog ishodišta (Slika 1.14).



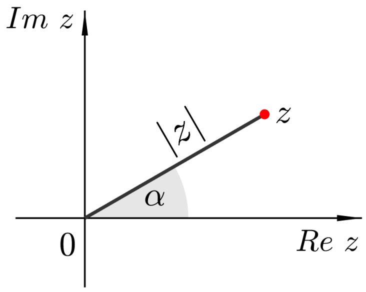
Slika 1.14: Zraka kompleksnih brojeva istog argumenta

2. Kompleksni brojevi koji imaju istu apsolutnu vrijednost kao i z čine u kompleksnoj ravnini kružnicu sa središtem u ishodištu koja prolazi kroz z, dakle ima polumjer $|z|$, Slika 1.15.



Slika 1.15: Kružnica kompleksnih brojeva iste apsolutne vrijednosti

3. Svaki je kompleksni broj z različit od nule jednoznačno određen svojim argumentom (kutom) i svojom apsolutnom vrijednošću (Slika 1.16).



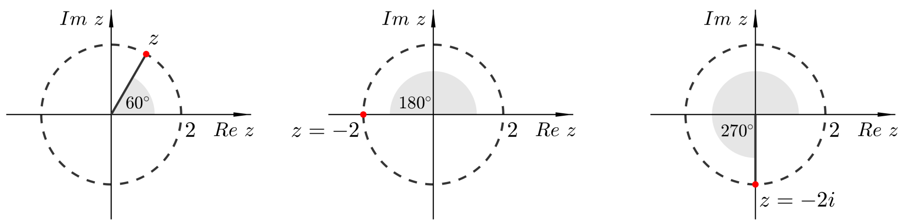
Slika 1.16: Argument i apsolutna vrijednost kompleksnog broja

Primjer 1.6. [Prikaz kompleksnog broja u trigonometrijskom zapisu] Prikažimo u kompleksnoj ravnini kompleksni broj z ako je (Slika 1.17):

(i) $|z| = 2$ i $\alpha = 60°$

(ii) $|z| = 2$ i $\alpha = 180°$

(iii) $|z| = 2$ i $\alpha = 270°$.



Slika 1.17: Primjer 1.6

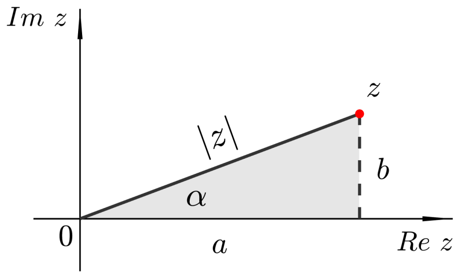
□

Iz $\cos\alpha = \frac{a}{|z|}$ i $\sin\alpha = \frac{b}{|z|}$ dobijemo (Slika 1.18):

$$z = a + bi = |z|\cos\alpha + |z|\sin\alpha \cdot i = |z|\,(\cos\alpha + \sin\alpha \cdot i).$$

To je **trigonometrijski prikaz** kompleksnog broja. Obično se piše tako da i i $\sin\alpha$ zamijene mjesta:

$$z = |z|\,(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$



Slika 1.18: Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja

Primjer 1.7. [Određivanje trigonometrijskog prikaza iz algebarskog] Odredimo trigonometrijski prikaz kompleksnih brojeva iz Primjera 1.5:

(i) $z = 1 + i$, $|z| = \sqrt{2}$, $\alpha = 45^\circ$ pa je

$$z = |z|\,(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$$

(ii) $z = 1 - i$, $|z| = \sqrt{2}$, $\beta = 135^\circ$ pa je

$$z = |z|\,(\cos\beta + i\sin\beta) = \sqrt{2}(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ).$$

□

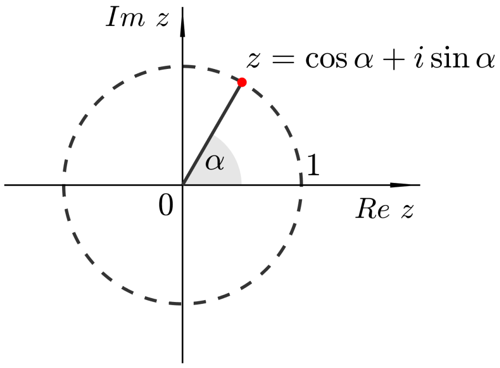
Primjer 1.8. [Određivanje algebarskog prikaza iz trigonometrijskog] Odredimo kompleksni broj z, tj. odredimo njegov algebarski prikaz, ako je $|z| = 2$ i $\alpha = 60^\circ$:

$$z = |z|\,(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i.$$

□

1.3.2 Geometrijska interpretacija brojeva $\cos\alpha + i\sin\alpha$: jedinična kružnica

Brojevi $\cos\alpha + i\sin\alpha$ imaju apsolutnu vrijednost 1 jer je $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Stoga se ti brojevi nalaze na jediničnoj kružnici (Slika 1.19). Možemo zamišljati kako ti brojevi obilaze jediničnu kružnicu suprotno kazaljci sata počevši od broja 1, dok se kut α mijenja od 0° do 360° (opet broj 1).



Slika 1.19: Kompleksni brojevi na jediničnoj kružnici

Također, možemo zamišljati da se kut α sve više povećava pa, dok se promijeni od $360°$ do $720°$, brojevi će još jednom obići kružnicu itd. Pritom za kutove α, $\alpha + 360°$, $\alpha + 720°$, ... imamo iste kompleksne brojeve. Svi ti kutovi $\alpha + k \cdot 360°$, gdje k prolazi skupom cijelih brojeva, jesu *argumenti* istog kompleksnog broja z pa pišemo

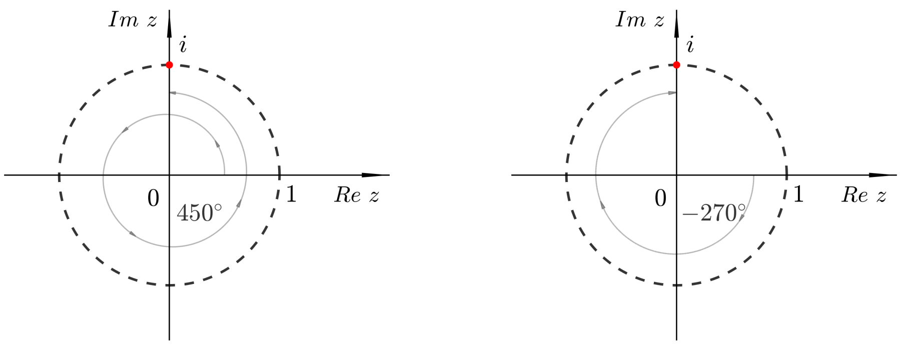
$$\arg(z) = \alpha + k \cdot 360°.$$

Pritom se $\operatorname{Arg}(z) = \alpha$ naziva **glavnim argumentom**.

Primjer 1.9. [Odnos glavnog argumenta i ostalih argumenata]

(i) Za $z = i$ glavni argument je $\operatorname{Arg}(z) = 90°$ dok su svi argumenti $\arg(z) = 90° + k \cdot 360°$. Na primjer (Slika 1.20):

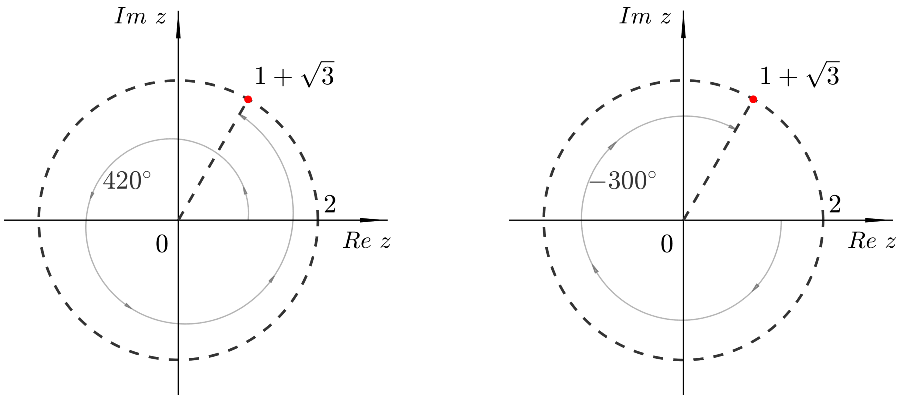
- za $k = 0$ dobijemo glavni argument
- za $k = 1$ dobijemo argument $90° + 360° = 450°$. To treba tumačiti tako da, kad iz broja 1 kružimo jediničnom kružnicom za kut $450°$ *suprotno kazaljci sata*, dolazimo u broj i. Pritom ćemo jednom proći kroz i, ali ćemo nastaviti kruženje.
- za $k = -1$ dobijemo argument $90° + (-1)360° = -270°$. To treba tumačiti tako da, kad iz broja 1 kružimo jediničnom kružnicom za kut $270°$ *u skladu s kazaljkom na satu* (zbog negativnog predznaka), dolazimo u broj i.



Slika 1.20: Primjer 1.9(i)

(ii) Za $z = 1 + \sqrt{3}i$ glavni argument je $\operatorname{Arg}(1 + \sqrt{3}i) = 60°$ (Primjer 1.8), dok su svi argumenti $\arg(1 + \sqrt{3}i) = 60° + k \cdot 360°$. Na primjer (Slika 1.21):

- za $k = 0$ dobijemo glavni argument
- za $k = 1$ dobijemo argument $60° + 360° = 420°$. To treba tumačiti tako da, kad iz broja 2 kružimo kružnicom polumjera 2 (jer kompleksni broj ima apsolutnu vrijednost 2) za kut $420°$ suprotno kazaljci sata, dolazimo u broj $1 + \sqrt{3}i$. Pritom ćemo jednom proći kroz $1 + \sqrt{3}i$, ali ćemo nastaviti kruženje.
- za $k = -1$ dobijemo argument $60° + (-1)360° = -300°$. To treba tumačiti tako da, kad iz broja 2 kružimo kružnicom polumjera 2 za kut $300°$ u skladu s kazaljkom na satu, dolazimo u broj $1 + \sqrt{3}i$.



Slika 1.21: Primjer 1.9(ii)

□

1.3.3 Geometrijska interpretacija potenciranja na jediničnoj kružnici - Moivreova formula

Ako je $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, tj. ako je z na jediničnoj kružnici, onda je

$$z^2 = \cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha).$$

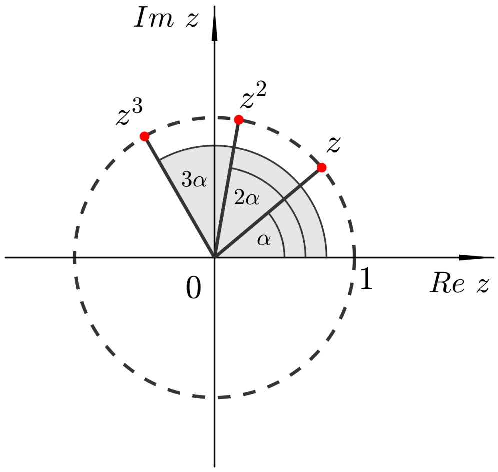
Vidimo da se z kvadrira tako da mu se argument udvostručuje. Slično:

$$z^3 = \cos(3\alpha) + i\sin(3\alpha),$$

tj. z se kubira tako da mu se argument utrostručuje (Slika 1.22).
Općenito:

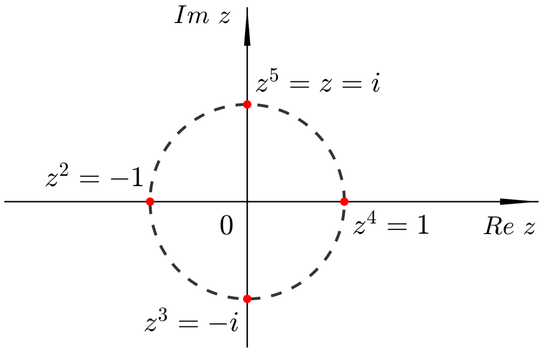
$$z^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha),$$

tj. z se **potencira** tako da mu se argument pomnoži s eksponentom. To je **Moivreova formula**.



Slika 1.22: Kvadriranje i kubiranje kompleksnog broja na jediničnoj kružnici

Primjer 1.10. [Potenciranje na jediničnoj kružnici]
Ako je $z = i$, onda je $z^2 = -1$, $z^3 = -i$, $z^4 = 1$, $z^5 = i$ itd. Vidimo (Slika 1.23) da potencije ostaju na jediničnoj kružnici, samo se argument udvostručuje, utrostručuje itd. Naime, argumenti su, redom, $90°$, $180°$, $270°$, $360°$ itd.



Slika 1.23: Primjer 1.10

□

Moivreova formula može se primijeniti na sve kompleksne brojeve različite od nule, a ne samo one na jediničnoj kružnici, tj. apsolutne vrijednosti 1: ako je

$$z = |z|\,(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

onda je

$$z^n = |z|^n\,(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)).$$

Kompleksni broj potencira se tako da mu se
apsolutna vrijednost potencira, a argument pomnoži eksponentom.

Primjer 1.11. [Potenciranje kompleksnog broja]
Izračunajmo $(1+\sqrt{3}i)^5$. Možemo računati izravno, samo što bi to bilo

mukotrpno. Zato primjenjujemo Moivreovu formulu. Već znamo da je $|z| = 2$ i $\alpha = 60°$. Zato je

$$\begin{aligned} z^5 &= 2^5(\cos(5 \cdot 60°) + \mathrm{i}\sin(5 \cdot 60°)) \\ &= 32(\cos 300° + \mathrm{i}\sin 300°) \\ &= 32\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) \\ &= 16 + 16\sqrt{3}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

□

1.3.4 Množenje kompleksnih brojeva na jediničnoj kružnici

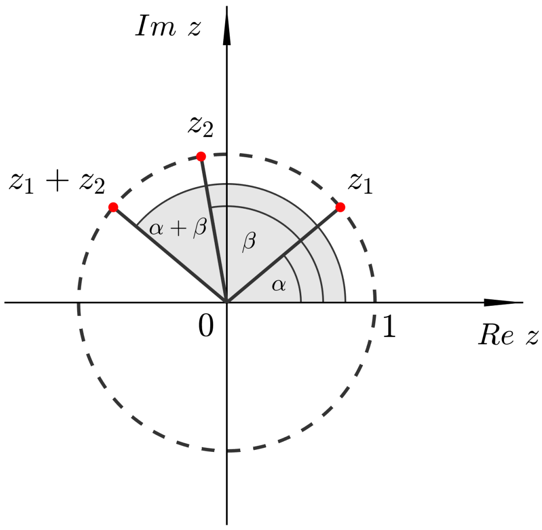
Uočimo dva kompleksna broja na jediničnoj kružnici:

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha \\ z_2 &= \cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta. \end{aligned}$$

Tada je

$$z_1 z_2 = \cos(\alpha + \beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha + \beta),$$

tj. kompleksni brojevi na jediničnoj kružnici množe se tako da se argumenti zbroje (Slika 1.24).



Slika 1.24: Množenje kompleksnih brojeva na jediničnoj kružnici

Uočimo: ako u tu formulu stavimo $\beta = \alpha$, dobit ćemo formulu za kvadriranje broja na jediničnoj kružnici.

Formulu za množenje kompleksnih brojeva na jediničnoj kružnici možemo primijeniti i općenito: ako je

$$\begin{aligned} z_1 &= |z_1|(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha) \\ z_2 &= |z_2|(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta), \end{aligned}$$

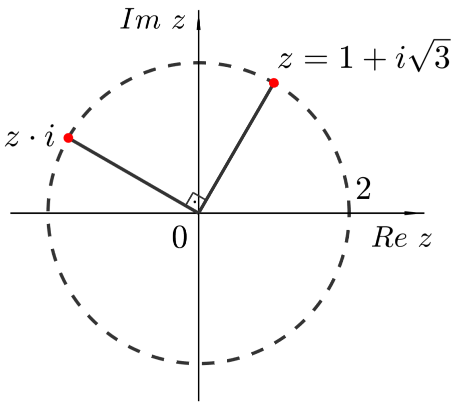
onda je

$$z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|\,(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)).$$

Kompleksni brojevi množe se tako da im se apsolutne vrijednosti pomnože, a argumenti zbroje.

Primjer 1.12. [Primjena formule za množenje kompleksnih brojeva] Koji ćemo broj dobiti ako zarotiramo kompleksni broj $z = 1 + \sqrt{3}i$ za $90°$ suprotno kazaljci sata?
Treba z pomnožiti s i jer i ima kut od $90°$, a apsolutnu vrijednost 1. Tako će se u rezultatu kut povećati za $90°$, a apsolutna vrijednosti ostati ista. Dakle (Slika 1.25):

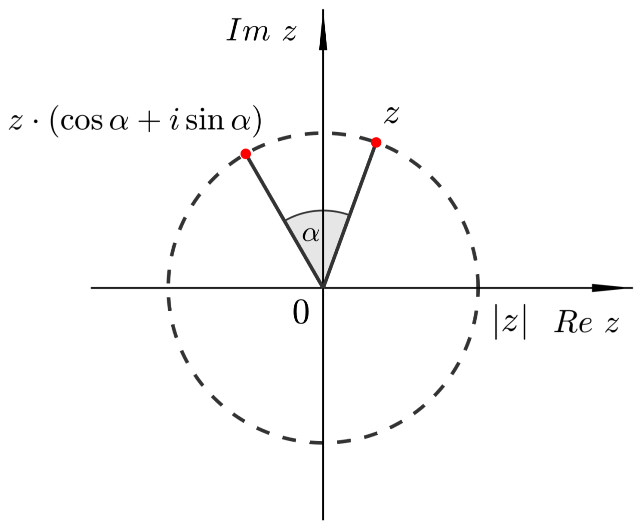
$$z \cdot i = (1 + \sqrt{3}i)i = -\sqrt{3} + i.$$



Slika 1.25: Primjer 1.12

□

Vidimo (Slika 1.26) da vrijedi općenito: *ako broj pomnožimo s* $\cos\alpha + i\sin\alpha$, *zarotirat ćemo ga za* α.



Slika 1.26: Množenje kompleksnog broja brojem $\cos\alpha + i\sin\alpha$

1.4 PRIMJENA MATLAB-A

1.4.1 Računanje s kompleksnim brojevima. Naredbe `complex`, `real` i `imag`, `abs` i `angle`

Osnovne aritmetičke operacije provode se pomoću uobičajenih oznaka $+$, $-$, $*$ i $/$. Na primjer, kvocijent dvaju kompleksnih brojeva $z_1 = 2+3i$ i $z_2 = 4-5i$ računamo na sljedeći način:

```
z1 = 2 + 3*i
z2 = 4 - 5*i
z1 / z2
```

Kao rezultat dobivamo:

```
ans = -0.1707 + 0.5366is
```

Napominjemo da ćemo ubuduće, radi ekonomičnosti zapisa i tamo gdje bude moguće, rezultat pisati u komentaru (koji počinje nakon znaka %), u istoj liniji u kojoj se nalazi i odgovarajuća naredba:

```
z1 / z2                                    % -0.1707 + 0.5366i
```

Kompleksan broj možemo zadati i pomoću `complex`. Za realni i imaginarni dio kompleksnog broja koristimo `real` i `imag`, redom. Apsolutna vrijednost kompleksnog broja i argument izražen u radijanima, uz mogućnost preračunavanja u stupnjeve, dobivaju se s `abs` i `angle`, redom. Sve ovo računamo za kompleksan broj $z = 3+4i$:

```
z = complex(3, 4)
real(z)                                                   % 3
imag(z)                                                   % 4
abs(z)                                                    % 5
angle(z)                               % 0.9273 (u radijanima)
180 * angle(z) / pi                   % 53.1301 (u stupnjevima)
```

1.4.2 Geometrijski prikaz kompleksnog broja. Naredbe `plot` i `polarplot`

Za prikaz broja u kompleksnoj ravnini koristimo uobičajenu naredbu `plot`, a ukoliko nas zanima prikaz u kojemu su vidljive komponente trigonometrijskog zapisa, tj. apsolutna vrijednost i argument, koristimo naredbu `polarplot`:

```
z = complex(3, 4)
plot(z, 'r.', 'MarkerSize', 16)
polarplot(z, 'r.', 'MarkerSize', 16)
```

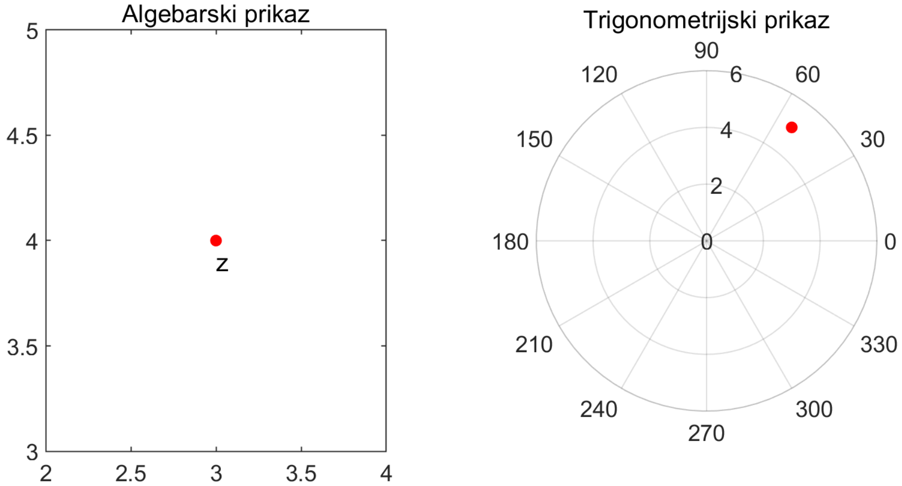
U gornjim linijama oznaka `'r.'` znači da smo kompleksan broj označili crvenom točkom dok `'MarkerSize', 16` određuje veličinu oznake. O standardnim specifikacijama naredbe `plot` može se naći u online ili tiskanim MATLAB priručnicima.

Naredbu za crtanje MATLAB uvijek izvršava na posljednjoj generiranoj slici i to tako da prebriše ono što je na njoj prethodno bilo prikazano. To znači da će u gornjem primjeru `polarplot` prebrisati ono što je generirano s `plot`, a to ovdje ne želimo. Kako bismo dobili oba prikaza, potrebno je prije `polarplot` navesti naredbu `figure` koja označava da izrađujemo *novi prikaz*:

```
z = complex(3, 4)
plot(z, 'r.', 'MarkerSize', 16)
figure
polarplot(z, 'r.', 'MarkerSize', 16)
```

Ako želimo jednu sliku na kojoj su gornji prikazi jedan pored drugoga, koristimo `tiledlayout` zajedno s `nexttile`. Na primjer, naredba `tiledlayout(1,2)` znači da želimo prikaz s jednim retkom i dvije slike. Za tekstualnu oznaku prikazanog kompleksnog broja upotrebljavamo `text`, a za naslove slika `title`. Napomenimo da ovdje nije potreban `figure` jer je sve na istom prikazu:

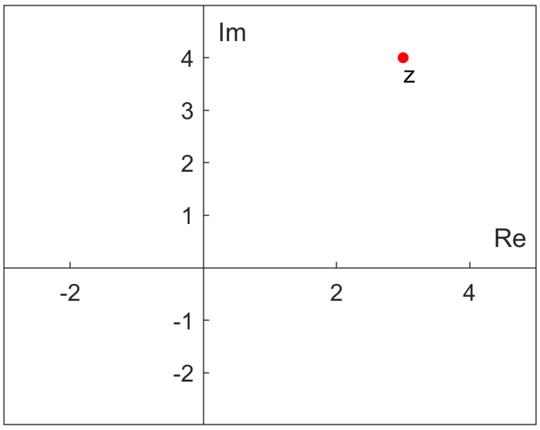
```
z = complex(3, 4)
tiledlayout(1, 2)
nexttile
plot(z, 'r.', 'MarkerSize', 16)
text(real(z), imag(z) - 0.1, 'z')
title('Algebarski prikaz', 'FontWeight', 'normal')
nexttile
polarplot(z, 'r.', 'MarkerSize', 16)
title('Trigonometrijski prikaz', 'FontWeight', 'normal')
```



Vidimo da na lijevoj slici MATLAB automatski određuje raspon koji će se prikazivati na koordinatnim osima te da nisu prikazane realna i imaginarna os. Kako bismo sami odredili raspon, koristimo naredbe `xlim` i `ylim`, a za prikazivanje osi koje prolaze kroz ishodište `ax` i njena dva svojstva ax.XAxisLocation i ax.YAxisLocation. Osi možemo označiti pomoću xlabel i ylabel.

Napravimo sve ovo za kompleksni broj $z = 3 + 4\mathrm{i}$ (slične naredbe pišemo u istom redu, odvojene znakom ;):

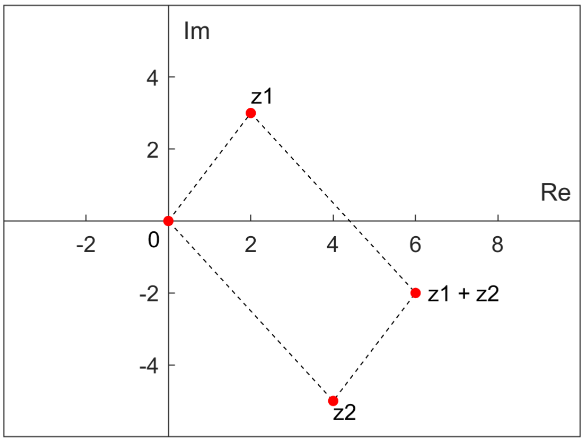
```
z = complex(3, 4)
plot(z, 'r.', 'MarkerSize', 16)
text(real(z), imag(z) - 0.3, 'z')
xlim([-3 5]); ylim([-3 5])
ax = gca
ax.XAxisLocation = 'origin'
ax.YAxisLocation = 'origin'
xlabel('Re'); ylabel('Im')
```



Za kraj, ilustrirajmo pravilo paralelograma za zbrajanje kompleksnih brojeva $z_1 = 2 + 3\mathrm{i}$ i $z_2 = 4 - 5\mathrm{i}$:

```
z1 = complex(2, 3)
z2 = complex(4, -5)
plot([0, z1, z1 + z2, z2, 0], 'k--')
hold on
plot([0, z1, z1 + z2, z2, 0], 'r.', 'MarkerSize', 16)
text(-0.5, -0.5, '0')
text(real(z1), imag(z1) + 0.5, 'z1')
text(real(z2), imag(z2) - 0.3, 'z2')
text(real(z1 + z2) + 0.3, imag(z1 + z2), 'z1 + z2')
xlim([-4 10]); ylim([-6 6])
ax = gca
ax.XAxisLocation = 'origin'
ax.YAxisLocation = 'origin'
xlabel('Re'); ylabel('Im')
```

Prije druge primjene naredbe plot, koristili smo hold on kako bismo dobili rezultat oba crtanja *na istom prikazu*. U suprotnom bismo imali prikazan samo rezultat posljednje plot naredbe. Uočimo i to da se `plot` koristi i za prikaz linije i za prikaz točke, uz razliku što kod prikaza linije stoji `'k--'` za crnu isprekidanu liniju, a kod prikaza točke imamo već poznatu specifikaciju `'r.', 'MarkerSize', 16`.



1.5 PITANJA I ZADATCI

1. Objasnite formulu $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ za svaki kompleksan broj z različit od 0.

2. Odredite vezu između:
   (i) $\text{Arg}(\lambda \cdot z)$ i $\text{Arg}(z)$, gdje je λ realan broj
   (ii) $\text{Arg}(\bar{z})$ i $\text{Arg}(z)$
   (iii) $\text{Arg}(z^{-1})$ i $\text{Arg}(z)$
   (iv) $\text{Arg}(z^{-1})$ i $\text{Arg}(\bar{z})$.

3. Neka je $z = |z|\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Odredite trigonometrijski prikaz od $\bar{z}$ i z^{-1} u terminima $|z|$ i α. Prvo napravite ako je $|z| = 2$ i $\alpha = 70°$, a onda općenito.

4. Predočite sve kompleksne brojeve z za koje je:
   (i) $|z| \leqslant 3$
   (ii) $1 \leqslant z < 3$.

5. Predočite sve kompleksne brojeve z za koje je $30° < \text{Arg}(z) \leqslant 135°$.

6. Predočite sve kompleksne brojeve z za koje je $1 \leqslant z < 3$ i $30° < \text{Arg}(z) \leqslant 135°$.

7. Neka je $z_1 = |z_1|\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ i $z_2 = |z_2|\,(\cos\beta + i\sin\beta)$. Odredite trigonometrijski prikaz od $\frac{z_1}{z_2}$.

2 REALNI VEKTORSKI PROSTOR

U lekciji se obrađuje pojam vektora, operacije s vektorima, duljine (norme) vektora, vektorskog prostora, dimenzije vektorskog prostora i njihova geometrijska i fizikalna interpretacija.

2.1 PRIPADNI PROBLEM

Intuitivno je jasno da je pravac jednodimenzionalan pa bi se njegove točke trebale opisivati brojevima - jedna točka, jedan broj. Ravnina je dvodimenzionalna pa bi se njene točke trebale opisivati pomoću dvaju brojeva itd. Taj se problem matematički rješava uvođenjem koordinatnog sustava na pravac, ravninu, prostor itd. te uvođenjem pojma uređenog para, uređene trojke itd.
Slično, postoje fizikalne veličine koje se mogu opisati jednim brojem (masa, temperatura itd.), ali postoje i veličine za čije opisivanje u pravilu treba više brojeva. Takva je, na primjer, sila za koju je važno ne samo kojeg je intenziteta već i koji joj je smjer djelovanja. Vidjet ćemo da je sila koja djeluje u ravnini određena pomoću dvaju brojeva, točnije, pomoću uređenog para brojeva dok je sila koja djeluje u prostoru određena pomoću triju brojeva - uređene trojke itd.
Vrlo često na istom prostoru, odnosno njegovu dijelu djeluje više sila pa se postavlja problem razmatranja njihova ukupnog djelovanja. To se matematički rješava algebrom vektora, tj. uvođenjem algebarskih operacija na vektore.

2.2 POTREBNO PREDZNANJE

Vektori u ravnini i u prostoru mogu se uvesti čisto geometrijski - pomoću usmjerenih dužina ili analitički - pomoću uređenih parova, odnosno uređenih trojki. Geometrijsko uvođenje vektora započelo je u osnovnoj školi i nastavljeno u srednjoj, a analitičko je uvedeno tek djelomice i to samo za ravninu.

2.2.1 Geometrijsko uvođenje vektora u ravninu i prostor

Neka su A i B dvije točke ravnine ili prostora. Vektor s početkom A i završetkom B označavamo oznakom

$$\overrightarrow{AB}.$$

Taj pojam možemo zamišljati geometrijski i fizikalno (Slika 2.1):

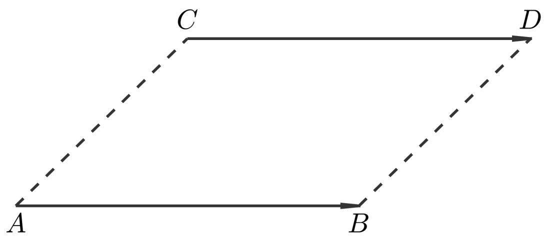
> **Geometrijski**, vektor $\overrightarrow{AB}$ zamišljamo kao *pomak (translaciju)* kojim smo točku A pomakli u točku B.
>
> **Fizikalno**, vektor $\overrightarrow{AB}$ zamišljamo kao *silu* kojoj je hvatište u točki A, smjer djelovanja je prema točki B, a intenzitet joj je predočen udaljenošću od A do B.

Slika 2.1: Geometrijski prikaz vektora

Iz ovih dviju predodžaba prirodno se nameću pojmovi duljine (modula), smjera i usmjerenja (orijentacije) vektora:

> **Duljina (modul)** vektora $\overrightarrow{AB}$ je udaljenost točaka A i B, tj. duljina dužine $\overline{AB}$. Označava se kao $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.
>
> **Smjer** vektora $\overrightarrow{AB}$ je smjer koji određuje pravac na kojima su točke A i B.
>
> **Usmjerenje** vektora $\overrightarrow{AB}$ je od točke A do točke B.

Iz geometrijske predodžbe vektora proizlazi da ne treba razlikovati vektore koji djeluju po usporednim pravcima, a imaju jednake duljine i jednako su orijentirani.
Odatle proizlazi definicija **jednakosti vektora**: vektor $\overrightarrow{AB}$ jednak je vektoru $\overrightarrow{CD}$ ako točke A, B, D i C (upravo u tom redoslijedu) čine paralelogram $ABDC$, Slika 2.2.



Slika 2.2: Jednakost vektora $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

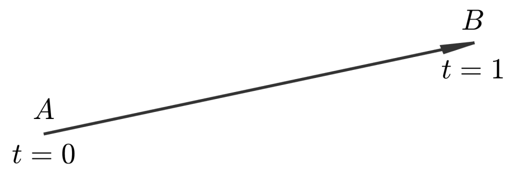
Sad imamo glavnu tvrdnju o jednakosti vektora:

> Dva su vektora jednaka ako i samo ako imaju jednake duljine, isti smjer i isto usmjerenje.

Primjer 2.1. [Interpretacija vektora brzine]
Ako je $\overrightarrow{AB}$ **vektor brzine**, možemo ga interpretirati ovako (Slika 2.3):

1. Početna točka A je položaj u kojemu se, u trenutku $t = 0$, nalazi čestica koja se giba.

2. Završna točka B je točka u kojoj bi se ta čestica našla nakon jedne sekunde, odnosno jedinice vremena, ako bi se nastavila gibati po pravcu brzinom $\overrightarrow{AB}$. To je zato što modul vektora brzine $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ znači duljinu puta što ga čestica prijeđe u jedinici vremena, ako se giba po pravcu brzinom $\overrightarrow{AB}$.

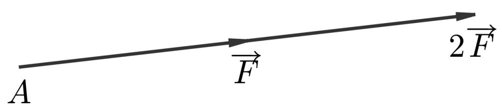


Slika 2.3: Primjer 2.1

□

2.2.2 Množenje vektora brojem (skalarom)

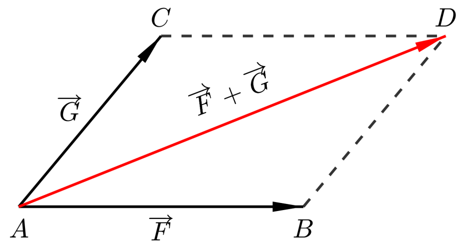
Neka u točki A prostora djeluje sila $\overrightarrow{F}$. Intuitivno je jasno da dvostruki učinak od te sile čini sila koja ima isto hvatište A, dva puta je veća po intenzitetu, a ima isti smjer i orijentaciju kao i $\overrightarrow{F}$. Razumljivo je da ćemo tu novu silu označiti kao $2\overrightarrow{F}$. Kažemo da smo silu $\overrightarrow{F}$ pomnožili s 2, Slika 2.4.
Slično je pri množenju sile s bilo kojim brojem, s time da se pri množenju s negativnim brojem mijenja orijentacija-usmjerenje, a pri množenju s brojem nula dobije sila jednaka nuli. Na osnovi te fizikalne predodžbe uvodimo operaciju **množenja vektora i skalara**, pri čemu obično prije pišemo skalar, a potom vektor. Do iste definicije dolazimo razmatrajući vektore geometrijski, tj. kao translacije.



Slika 2.4: Množenje vektora skalarom

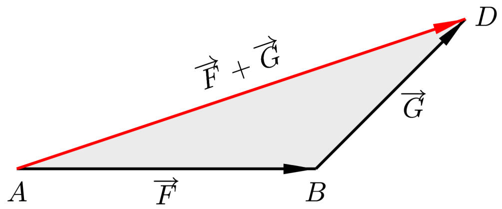
2.2.3 Zbrajanje vektora

Neka u točki A prostora djeluju dvije sile $\overrightarrow{F}$ i $\overrightarrow{G}$, svaka sa svojim intenzitetom, smjerom i usmjerenjem. Treba odrediti **rezultantu** njihova djelovanja. Ako te dvije sile imaju isti smjer, sve je jasno, bez obzira jesu li usmjerenja ista ili suprotna. Općenito, *pokus* potvrđuje da je ukupno djelovanje - rezultanta opet sila s istim hvatištem A, koja djeluje duž dijagonale paralelograma što ga te dvije sile razapinju i koja ima intenzitet jednak duljini te dijagonale. Odatle potječe **pravilo paralelograma** za **zbrajanje vektora** (Slika 2.5).



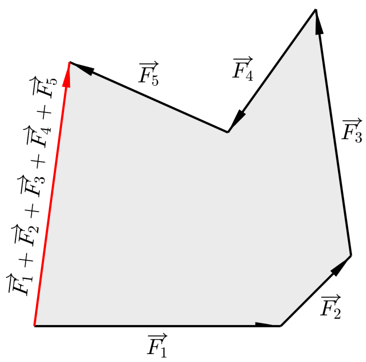
Slika 2.5: Zbrajanje vektora - pravilo paralelograma

Još jasnije pravilo za zbrajanje vektora dobijemo iz geometrijske interpretacije vektora kao translacija: točka A translatira se pomoću $\overrightarrow{F}$ u točku B, potom točka B pomoću $\overrightarrow{G}$ u točku D. Potpuno isto bi se dobilo da prvo djeluje $\overrightarrow{G}$ pa potom $\overrightarrow{F}$. Odatle potječe **pravilo trokuta** za zbrajanje vektora (Slika 2.6).



Slika 2.6: Zbrajanje vektora - pravilo trokuta

To se pravilo lako poopćuje na **pravilo mnogokuta** (poligona) za zbrajanje više vektora (Slika 2.7).



Slika 2.7: Zbrajanje vektora - pravilo mnogokuta

Oduzimanje vektora svodi se na zbrajanje sa **suprotnim vektorom**:

$$\overrightarrow{F}-\overrightarrow{G}:=\overrightarrow{F}+(-\overrightarrow{G}).$$

Osim sa strelicama, vektori se često označavaju masnim slovima, primjerice, **a**, **b**, **x**, **y** , ... Posebice, vektor duljine nula, tj. **nulvektor** označava se kao **o**.

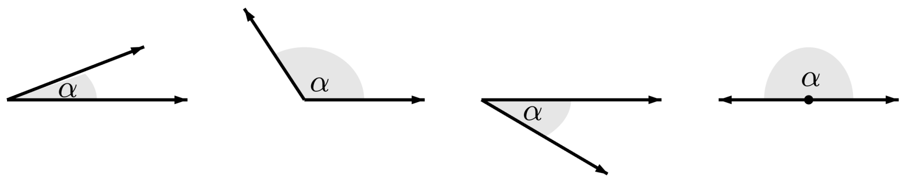
Vrijede sljedeća očita **svojstva zbrajanja vektora i množenja vektora sa skalarom**:

1. Komutativnost: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
2. Asocijativnost: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
3. Neutralni element za zbrajanje: $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
4. Suprotni element: $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
5. $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$
6. $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$.

2.2.4 Kut među vektorima

Intuitivno je jasno, a pokusom se lako potvrdi, da rezultanta djelovanja dviju sila sa zajedničkim hvatištem ne ovisi samo o njihovim intenzitetima već i o kutu pod kojim te sile djeluju. Od dvaju kutova, vanjskog i unutarnjeg, što ga te dvije sile zatvaraju, važan nam je manji - unutarnji jer rezultanta djeluje unutar njega.
Odatle potječe definicija **kuta među dvama vektorima** različitima od nulvektora: to je manji od kutova što ga ta dva vektora određuju kad ih postavimo da počinju u istoj točki. Posebni su slučajevi kad je kut *nula-kut* ili *ispruženi kut* (Slika 2.8).
Vidimo da za kut α među vektorima - točnije, za njihovu mjeru - vrijedi

$$0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ.$$



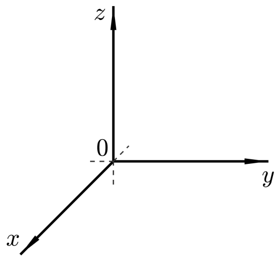
Slika 2.8: Kut među vektorima

2.3 NOVE DEFINICIJE I TVRDNJE S PRIMJERIMA

2.3.1 Koordinatni sustav u prostoru

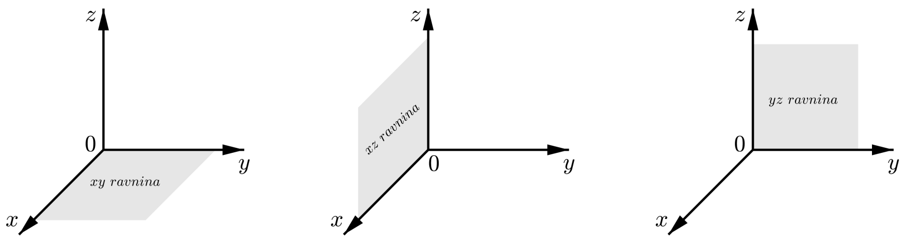
Biranjem dviju točaka na pravcu (jedne za smještanje nule, a drugu za smještanje jedinice) uvodi se koordinatni sustav na pravcu. Pravac s uvedenim koordinatnim sustavom zove se **brojevni** ili **koordinatni pravac**. Na brojevnom pravcu, umjesto s točkama, možemo raditi s brojevima - koordinatama točaka. Točka s koordinatom 0 zove se ishodište.
Biranjem dvaju međusobno okomitih brojevnih pravaca u ravnini (koji se sijeku u ishodištima) uvodi se koordinatni sustav u ravninu. Ravnina s uvedenim koordinatnim sustavom zove se **koordinatna ravnina**. U koordinatnoj ravnini, umjesto s točkama, možemo raditi s uređenim parovima brojeva - koordinatama točke.

Biranjem triju međusobno okomitih brojevnih pravaca u prostoru (koji se sijeku u ishodištima u jednoj točki) uvodi se koordinatni sustav u prostor. Prostor s uvedenim koordinatnim sustavom zove se **koordinatni prostor** (Slika 2.9).



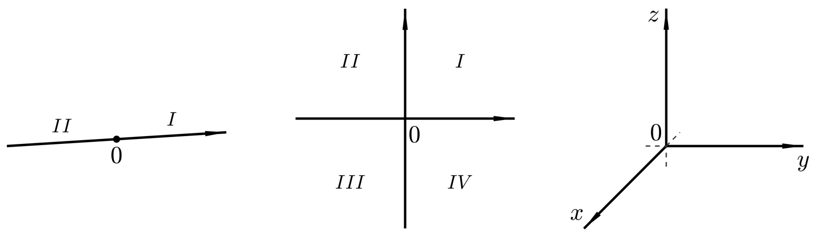
Slika 2.9: Koordinatni prostor

Istaknuti dio koordinatnog prostora možemo zamišljati kao ugao prostorije u kojem se sastaju tri brida: vertikalni odgovara pozitivnom dijelu z-osi, lijevi pozitivnom dijelu x-osi, a desni pozitivnom dijelu y-osi.
Vidimo da x-os i y-os određuju koordinatnu ravninu - pod prostorije, da x-os i z-os također određuju koordinatnu ravninu - lijevi zid, a y-os i z-os desni zid (Slika 2.10).



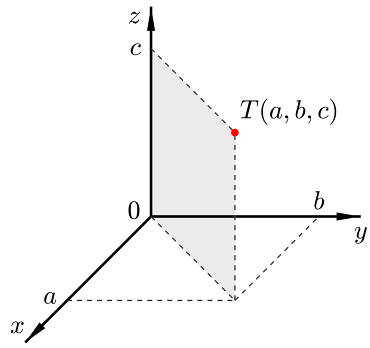
Slika 2.10: Koordinatne ravnine

Uočimo sljedeću analogiju (Slika 2.11):
Jedna točka (ishodište) dijeli koordinatni pravac na dva **polupravca**.
Dva pravca (koordinatne osi) dijele koordinatnu ravninu na četiri **kvadranta**.
Tri koordinatne ravnine dijele koordinatni prostor na osam **oktanata**.



Slika 2.11: Koordinatni polupravci, kvadranti i oktanti

U koordinatnom prostoru svaka je točka jednoznačno određena uređenom trojkom brojeva (x, y i z koordinatama točke), Slika 2.12.



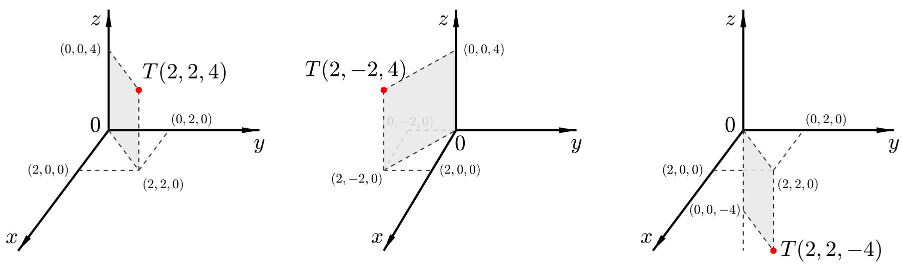
Slika 2.12: Prikaz točke u koordinatnoj ravnini

Primjer 2.2. [Prikaz točke u koordinatnom prostoru]
Predočimo sljedeće točke u koordinatnom prostoru (Slika 2.13):

(i) $A(2, 2, 4)$

(ii) $B(2, -2, 4)$

(iii) $C(2, 2, -4)$.



Slika 2.13: Primjer 2.2

□

2.3.2 Koordinatni sustav u n-dimenzionalnom prostoru

Vidimo da se:

1. koordinatni pravac može poistovjetiti sa skupom realnih brojeva $\mathbb{R}$ - to je jednodimenzionalni koordinatni prostor
2. koordinatna ravnina može poistovjetiti sa skupom svih uređenih parova realnih brojeva (oznaka $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ili $\mathbb{R}^2$) - to je dvodimenzionalni koordinatni prostor
3. koordinatni prostor može poistovjetiti sa skupom svih uređenih trojka realnih brojeva (oznaka $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ili $\mathbb{R}^3$) - to je trodimenzionalni koordinatni prostor.

Analogno se definira n-dimenzionalni koordinatni prostor - koordinatni sustav, za bilo koji prirodni broj n. To je skup svih uređenih n-torka realnih brojeva (oznaka $\mathbb{R}^n$):

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

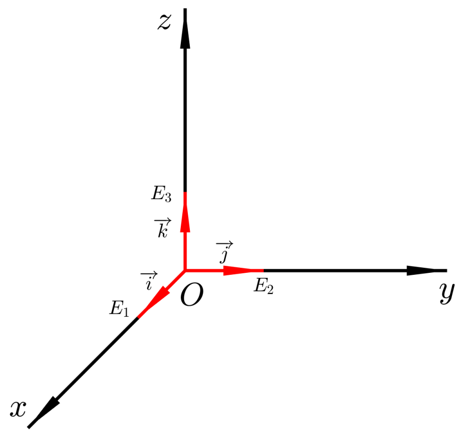
2.3.3 Jedinični vektori

Uočimo u koordinatnom prostoru tri točke na pozitivnim dijelovima x-osi i y-osi, odnosno z-osi redom, na jediničnoj udaljenosti od ishodišta:

$$E_1 := (1, 0, 0), \; E_2 := (0, 1, 0), \; E_3 := (0, 0, 1).$$

Te točke određuju tri **jedinična vektora** (Slika 2.14):

$$\vec{i} := \overrightarrow{OE_1}, \; \vec{j} := \overrightarrow{OE_2}, \; \vec{k} := \overrightarrow{OE_3}.$$



Slika 2.14: Jedinični vektori u koordinatnom prostoru

Jedinični vektori zapisuju se i pomoću **jednostupčanih matrica**:

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Uočimo da je to samo drukčiji zapis koordinata završnih točaka tih vektora.

2.3.4 Jedinični vektori u n-dimenzionalnom prostoru

Analogno jediničnim vektorima u ravnini i prostoru, definiraju se jedinični vektori u n-dimenzionalnom prostoru: to je n vektora (kod $\mathbf{e_i}$ na i-tom je mjestu 1, a na ostalima mjestima su nule)

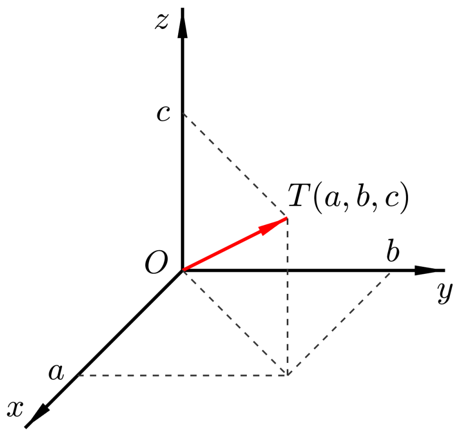
$$\mathbf{e_1}, \; \mathbf{e_2}, \; \ldots \; \mathbf{e_n}$$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2.3.5 Radijus vektori - analitički prikaz vektora u koordinatnom prostoru

Točka $T(a, b, c)$ koordinatnog prostora određuje jedinstven vektor $\overrightarrow{OT}$ s početkom u ishodištu i završetkom u T - **radijus vektor**, Slika 2.15. Vidimo da svaki vektor prostora možemo shvatiti kao radijus vektor. Vidimo također da vrijedi:

$$\overrightarrow{OT} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}.$$



Slika 2.15: Radijus vektor u koordinatnom prostoru

Kažemo da smo vektor $\overrightarrow{OT}$ zapisali kao **linearnu kombinaciju** vektora $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$. Tu linearnu kombinaciju zapisujemo i kao (što je samo drukčiji zapis koordinata točke T)

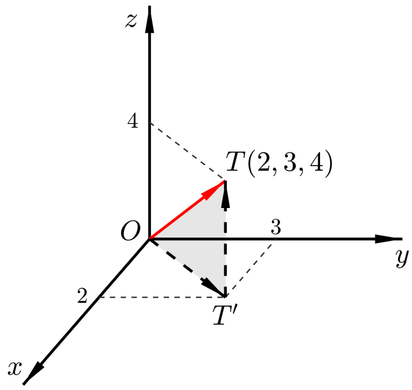
$$\overrightarrow{OT} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Primjer 2.3. [Radijus vektor]
Za $T(2, 3, 4)$ izravno iz Slike 2.16 vidi se da je

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OT} &= \overrightarrow{OT'} + \overrightarrow{T'T} \\ &= (2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}\,) + 4\,\vec{k} \\ &= 2\,\vec{i} + 3\,\vec{j} + 4\,\vec{k}, \end{aligned}$$

odnosno da je

$$\overrightarrow{OT} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$



Slika 2.16: Primjer 2.3

□

Uočimo: vektor u prostoru može se poistovjetiti s točkom u prostoru (tako da ta točka bude završetak, a ishodište početak), a točka u prostoru s jednostupčanom matricom sastavljenom od koordinata te točke. Dakle:

$$\text{Skup vektora prostora} = \text{Skup matrica oblika} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

gdje su a, b i c realni brojevi. Kad vektor predočimo ovako ili kao linearnu kombinaciju jediničnih vektora $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$, kažemo da smo ga predočili **analitički**.

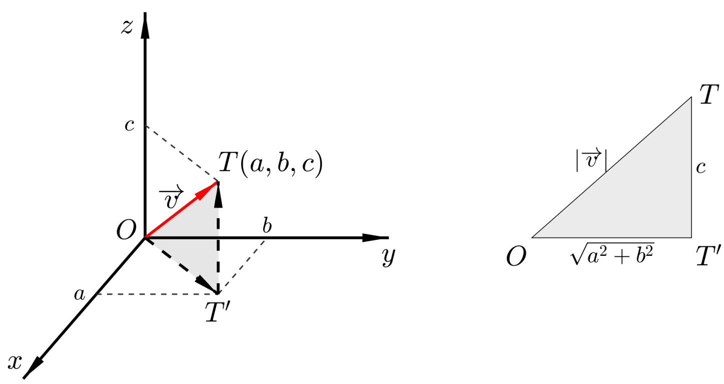
U n-dimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^n$ za radijus vektor $\mathbf{v} = \overrightarrow{OT}$, gdje je $T(a_1, \dots, a_n)$, vrijedi

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e_1} + \cdots + a_n\mathbf{e_n}.$$

2.3.6 Formula za duljinu vektora

Izravno iz Slike 2.17 izvodimo **formulu za duljinu vektora** $\vec{v}$:

$$|\vec{v}| = \left|a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}\right| = \sqrt{(\sqrt{a^2+b^2})^2 + c^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$



Slika 2.17: Formula za duljinu vektora

Primjer 2.4. [Duljina vektora]
Odredimo duljinu vektora $\vec{v} = 4\vec{i} + 7\vec{j} - 4\vec{k}$.
Koristeći se formulom za duljinu vektora u koordinatnom sustavu, dobijemo

$$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 7^2 + (-4)^2} = 9.$$

□

U n-dimenzionalnom prostoru općenito vrijedi

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2},$$

gdje je $\mathbf{v} = a_1\mathbf{e_1} + a_2\mathbf{e_2} + \cdots + a_n\mathbf{e_n}$.

2.3.7 Algebarske operacije s vektorima u koordinatnom sustavu

Vektore s analitičkim prikazom zbrajamo i množimo sa skalarom kao u primjeru.

Primjer 2.5. [Algebarske operacije s vektorima]
Odredimo $2\vec{u} + 3\vec{v}$ ako je

$$\begin{aligned} \vec{u} &= 4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{v} &= 3\vec{i} - 5\vec{k}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\vec{u} + 3\vec{v} &= 2(4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) + 3(3\vec{i} - 5\vec{k}) \\ &= (8\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}) + (9\vec{i} - 15\vec{k}) \\ &= 17\vec{i} - 4\vec{j} - 13\vec{k}. \end{aligned}$$

Ako bismo se koristili zapisom pomoću jednostupčanih matrica, imali bismo

$$\begin{aligned} 2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = 2\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ -15 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 17 \\ -4 \\ -13 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Slično je s operacijama na vektorima u n-dimenzionalnom prostoru.

2.3.8 Analitički prikaz i duljina vektora

Ako je $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$, onda je (Slika 2.18)

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\overrightarrow{i} + (y_2 - y_1)\overrightarrow{j} + (z_2 - z_1)\overrightarrow{k}$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Slika 2.18: Analitički prikaz vektora

Primjer 2.6. [Analitički zapis i duljina vektora]
Odredimo analitički zapis i duljinu vektora $\overrightarrow{AB}$ ako je $A(2, 1, 3)$ i $B(1, -2, 5)$.

$$\overrightarrow{AB} = (1-2)\overrightarrow{i} + (-2-1)\overrightarrow{j} + (5-3)\overrightarrow{k} = -\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{14}.$$

□

U n-dimenzionalnom prostoru vrijede analogne formule: ako je $A(a_1, \ldots, a_n)$, $B(b_1, \ldots, b_n)$, onda je

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1)\mathbf{e_1} + \cdots + (b_n - a_n)\mathbf{e_n}$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}.$$

2.3.9 Kriterij kolinearnosti vektora

Vektori

$$\overrightarrow{v_1} = a_1\overrightarrow{i} + b_1\overrightarrow{j} + c_1\overrightarrow{k}$$
$$\overrightarrow{v_2} = a_2\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + c_2\overrightarrow{k}$$

su **kolinearni** (**proporcionalni**) ako su im odgovarajuće komponente proporcionalne, tj. ako je

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \lambda.$$

Pritom, ako je $\lambda > 0$ vektori su jednako usmjereni, a ako je $\lambda < 0$ oni su suprotno usmjereni.

Primjer 2.7. [Kolinearnost vektora]
Provjerimo kolinearnost vektora $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ ako je:

(i) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

(ii) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$

(iii) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$

(i) Tu je
$$\frac{8}{4} = \frac{-4}{-2} \neq \frac{1}{1}$$
pa vektori nisu kolinearni.

(ii) Tu je
$$\frac{8}{4} = \frac{-4}{-2} = \frac{2}{1} = 2$$
pa su vektori kolinearni i, jer je omjer koeficijenata pozitivan, oni su isto usmjereni (orijentirani).

(iii) Tu je
$$\frac{-8}{4} = \frac{4}{-2} = \frac{-2}{1} = -2$$
pa su vektori kolinearni i, jer je omjer koeficijenata negativan, oni su suprotno usmjereni. □

Analogan kriterij vrijedi za kolinearnost vektora u n-dimenzionalnom prostoru.

2.4 PRIMJENA MATLAB-A

2.4.1 Računanje s vektorima. Naredbe `norm` i `vecnorm`

Vektore zadajemo pomoću jednostupčanih matrica, gdje oznake ; određuju da je riječ o stupcu (da ih nema, radilo bi se o retku):

```
v = [4; 7; -4]
```

Pojedina komponenta vektora dobije se navođenjem njena indeksa:

```
v(2)                                              % 7
```

Modul vektora dobivamo korištenjem `norm` ili `vecnorm`. Tako se za vektor iz Primjera 2.4 dobije:

```
v = [4; 7; -4]
vecnorm(v)                                        % 9
norm(v)                                           % 9
```

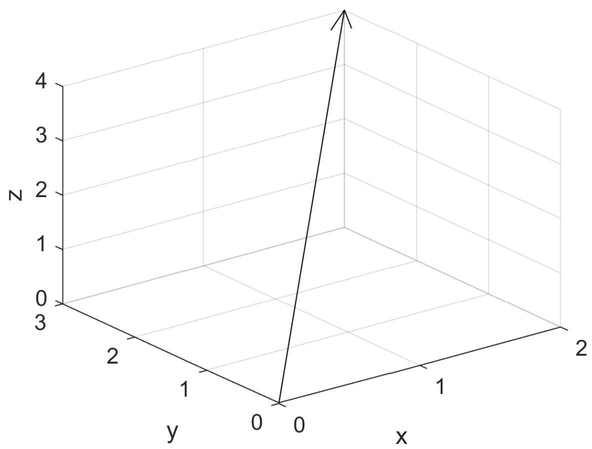
Algebarske operacije s vektorima, tj. zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom, provode se upotrebom uobičajenih oznaka, što demonstriramo na vektorima iz Primjera 2.5:

```
u = [4; -2; 1]
v = [3; 0; -5]
2*u + 3*v                                   % [17; -4; -13]
```

2.4.2 Geometrijski prikaz vektora. Naredba `quiver3`

Naredba `quiver3` omogućuje crtanje vektora trodimenzionalnog prostora. Napomenimo da za naredbe prostorne vizualizacije (pa tako ni za `quiver3`) nema jednostavnog načina da koordinatne osi budu prikazane onako kako smo navikli, tj. da prolaze kroz ishodište koordinatnog prostora. Prikazujemo radijus vektor iz Primjera 2.3:

```
v = [2; 3; 4]
quiver3(0, 0, 0, v(1), v(2), v(3), 'off', 'k-')
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z')
```



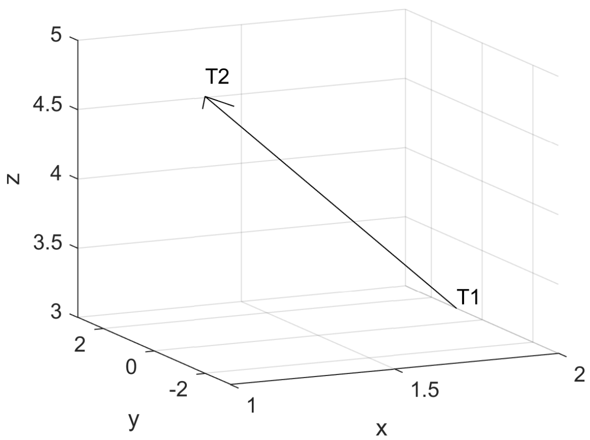
Argument `'off'` u `quiver3` označava da nismo skalirali, tj. da smo ga prikazali u punoj duljini. Opcija skaliranja vektora kod `quiver3` postoji jer se ta naredba obično koristi za prikaz vektorskog polja kod kojeg bi često, da nema skaliranja, došlo do neadekvatnog prikaza vektora. Dvije su mogućnosti:

- ako su vektori predugi, dolazi do njihovog preklapanja pa ih treba "skratiti" argumentom skaliranja manjim od 1: na primjer, argument `0.5` znači da se vektori skraćuju na polovicu svoje osnovne duljine

- ako su vektori prekratki, slabo su uočljivi pa ih treba "produljiti" argumentom skaliranja većim od 1: na primjer, argumentom `2` postižemo da se vektorima duljina udvostručuje.

Analitički zapis i vizualni prikaz vektora zadanog početnom i završnom točkom radimo za vektor iz Primjera 2.6. Naredba `quiver3` ovdje za prva tri argumenta ima koordinate početne točke T_1 vektora $\overrightarrow{v}$, a za sljedeća tri argumenta komponente vektora $\overrightarrow{v}$:

```
T1 = [2; 1; 3]
T2 = [1; -2; 5]
v = T2 - T1                                         % [-1; -3; 2]
quiver3(T1(1), T1(2), T1(3), v(1), v(2), v(3), 'off', 'k-')
pts = [T1 T2]
text(pts(1, :), pts(2, :), pts(3, :) * 1.03, {'T1', 'T2'})
xlim([1 2]); ylim([-3 3]); zlim([3 5])
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z')
view([-25, 15])
```



Da dobijemo gornji prikaz tekstualnih oznake točaka T_1 i T_2, postupili smo na sljedeći način:

- iz radijus vektora točaka T_1 i T_2 formiramo matricu `pts = [T1 T2]`. O matricama će više biti riječi u sljedećim lekcijama.

- u naredbi `text` koristimo pojedine retke `pts(1, :)`, `pts(2, :)` i `pts(3, :)` matrice `pts`. O tome kako se dobivaju retci zadane matrice također će biti više govora u sljedećim lekcijama.

Konačno, kako bismo odredili raspon koordinatnih osi koristimo naredbe `xlim`, `ylim` i `zlim`, a za određivanje točke zamišljenog pogleda na sliku `view`, koja za argumente ima azimut (kut otklona od negativnog dijela y-osi) i visinu (kut otklona od xy-ravnine).

2.5 PITANJA I ZADATCI

1. Neka je $\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$. Objasnite zašto iz $|\overrightarrow{v}| = 0$ slijedi $a = b = c = 0$. Pomoću toga objasnite zašto iz $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ slijedi $a = b = c$.

2. Neka je $\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{w} = e\overrightarrow{i} + f\overrightarrow{j} + g\overrightarrow{k}$. Objasnite zašto iz $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$ slijedi $a = e$ i $b = f$ i $c = g$.

3. Objasnite geometrijski zašto za svaka dva vektora $\vec{u}$ i $\vec{v}$ vrijedi $|\vec{u}+\vec{v}| \leqslant |\vec{u}|+|\vec{v}|$. Uz koje uvjete ova nejednakost postaje jednakost?

4. Zadan je vektor $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$. Odredite mu završnu točku B ako mu je početna $A(-3, 7, 0)$.

5. Zadan je vektor $\vec{v} = 5\vec{j} - \vec{k}$. Odredite mu početnu točku A ako mu je završna $B(-3, 7, 2)$.

6. Jesu li sljedeće točke, u navedenom redoslijedu, vrhovi paralelograma? Odgovor popratite crtežom.

   (i) $A(1, -1)$, $B(5, 2)$, $C(4, 4)$, $D(-1, 1)$

   (ii) $A(1, -1)$, $B(5, 2)$, $C(4, 4)$, $D(-1, 2)$.

7. Jesu li sljedeće točke na istom pravcu?

   (i) $A(1, -1, 3)$, $B(5, 2, 0)$, $C(9, 5, -2)$

   (ii) $A(1, -1, 3)$, $B(5, 2, 0)$, $C(9, 5, -3)$.

3 TRANSFORMACIJE RAVNINE I PROSTORA

U lekciji se uvodi pojam matrice kao zapisa nekih bitnih transformacija ravnine i prostora.

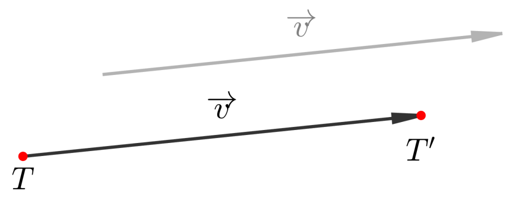
3.1 PRIPADNI PROBLEM

Osnovni elementi računalne grafike svakako su translacija ili pomak, rotacija ili vrtnja - oko točke ili oko pravca, simetrija ili zrcaljenje - s obzirom na točku, pravac ili ravninu.
Ti su pojmovi također vrlo bitni u prirodnim znanostima: kemijske i fizikalne strukture u pravilu posjeduju svojstva simetričnosti ili invarijantnosti s obzirom na ovakve transformacije.
Postavlja se pitanje kako se te i slične transformacije mogu opisati analitički - pomoću koordinata. To se matematički rješava uvođenjem pojma *matrice*. Posebne vrste matrica, jednostupčane, već smo upoznali kao analitičke zapise vektora u prostoru.

3.2 POTREBNO PREDZNANJE

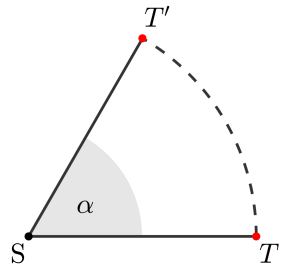
Funkcija - preslikavanje sa skupa A u skup B je pravilo koje svakom elementu skupa A pridružuje element skupa B. Zadati funkciju znači zadati to pravilo. Podsjetimo se sljedećih preslikavanja, tj. *transformacija ravnine i prostora*:

Translacija prostora ili ravnine za zadani vektor translacije je preslikavanje koje svaku točku pomakne za vektor translacije. Na Slici 3.1 točka T' dobivena je pomakom točke T za vektor translacije $\vec{v}$.



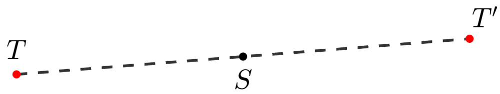
Slika 3.1: Translacija

Rotacija ravnine oko točke za zadani kut rotacije je preslikavanje ravnine predočeno Slikom 3.2: točka T' dobivena je rotacijom točke T oko S za kut rotacije α.



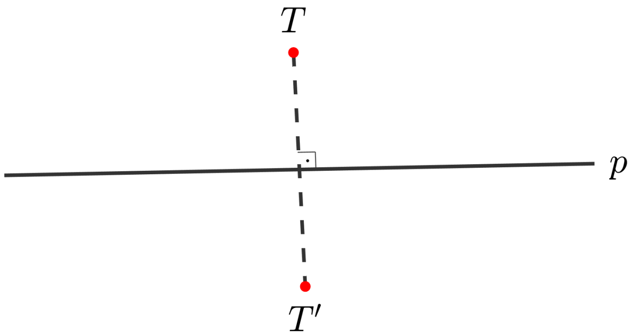
Slika 3.2: Rotacija

Centralna simetrija prostora ili ravnine s obzirom na centar simetrije: na Slici 3.3 točka T' dobivena je centralnom simetrijom točke T s obzirom na centar simetrije S.



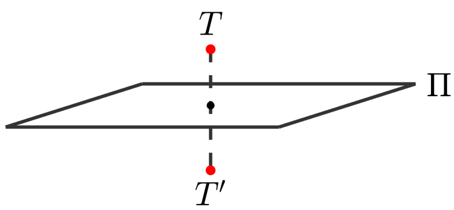
Slika 3.3: Centralna simetrija

Osna simetrija prostora ili ravnine s obzirom na pravac - os simetrije: na Slici 3.4 točka T' dobivena je osnom simetrijom s obzirom na os simetrije, pravac p.



Slika 3.4: Osna simetrija

Simetrija prostora s obzirom na ravninu simetrije: na Slici 3.5 točka T' dobivena je simetrijom točke T s obzirom na ravninu simetrije Π.



Slika 3.5: Simetrija s obzirom na ravninu

3.3 NOVE DEFINICIJE I TVRDNJE S PRIMJERIMA

3.3.1 Analitički zapis translacije prostora ili ravnine

Translacija prostora ili ravnine za vektor $\overrightarrow{v}$ je preslikavanje koje svaku točku pomakne za vektor $\overrightarrow{v}$. Uvedimo ove oznake:

$\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ - **vektor translacije**

$T(x, y, z)$ - opća točka prostora

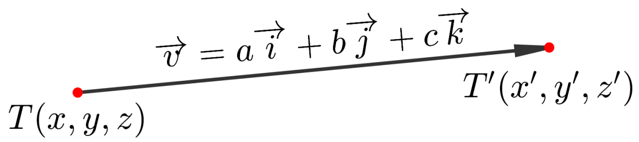
$T'(x', y', z')$ - točka dobivena translacijom točke T za vektor $\overrightarrow{v}$.

Tada iz jednakosti $\overrightarrow{TT'} = \overrightarrow{v}$ dobivamo $x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$, Slika 3.6, što se može zapisati kao

$$(x, y, z) \mapsto (x + a, y + b, z + c),$$

odnosno kao

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \end{bmatrix}.$$



Slika 3.6: Translacija prostora

Vidimo da se translacija ostvaruje zbrajanjem jednostupčanih matrica.

3.3.2 Analitički zapis rotacije ravnine

Promatramo rotaciju ravnine oko ishodišta. Uvedimo ove oznake:

α - **kut rotacije**

$T(x, y)$ - opća točka ravnine

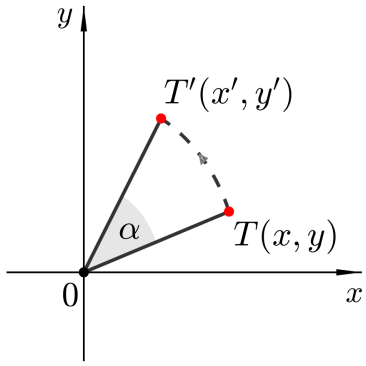
$T'(x', y')$ - točka dobivena rotacijom T za kut α oko ishodišta.

Koristeći formulu za množenje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom prikazu, dobijemo

$$\begin{aligned} x' + iy' &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(x + iy) \\ &= (\cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y) + i(\sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y), \end{aligned}$$

a odavdje (Slika 3.7):

$$\begin{aligned} x' &= \cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y \\ y' &= \sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y. \end{aligned}$$



Slika 3.7: Rotacija ravnine oko ishodišta za kut α

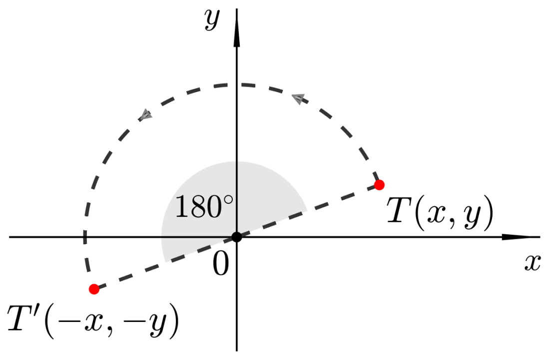
Uočimo da se gornji postupak mogao pomoću matrica zapisati i ovako:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cdot x - \sin\alpha\cdot y \\ \sin\alpha\cdot x + \cos\alpha\cdot y \end{bmatrix}.$$

Matricu $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ zovemo **matrica rotacije** za kut α. Matricama i njihovim množenjem detaljnije ćemo se baviti u sljedećem odlomku.

Primjer 3.1. [Rotacija ravnine oko ishodišta]

(i) Rotacija za 180°. Unaprijed znamo da je $x' = -x$ i $y' = -y$, Slika 3.8.



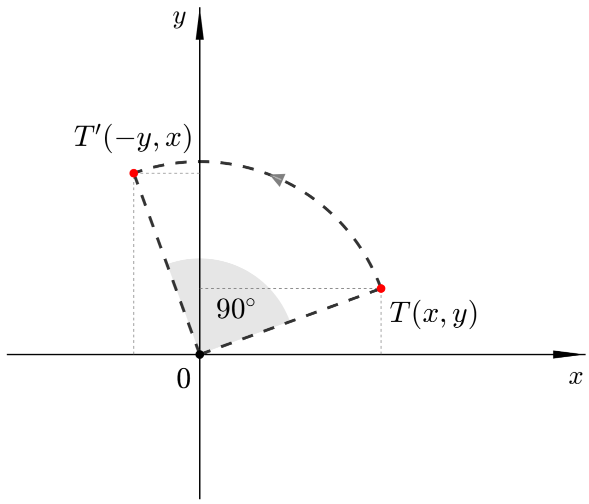
Slika 3.8: Primjer 3.1 - rotacija ravnine za 180°

Provjerimo da se formulom dobije isto:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1\cdot x - 0\cdot y \\ 0\cdot x + (-1)\cdot y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(ii) Rotacija za 90°: iz Slike 3.9 vidimo da bi moglo biti $x' = -y$ i $y' = x$. Provjerimo to formulom:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \cdot x - 1 \cdot y \\ 1 \cdot x + 0 \cdot y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

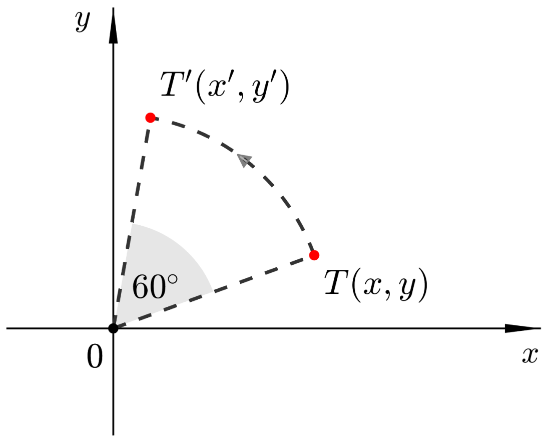


Slika 3.9: Primjer 3.1 - rotacija ravnine za 90°

(iii) Rotacija za 60°, Slika 3.10:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{bmatrix}.$$

Točnost možemo provjeriti približno, mjerenjem.



Slika 3.10: Primjer 3.1 - rotacija ravnine za 60°

$\square$

3.3.3 Kvadratna matrica

Vidimo da se rotacija ostvaruje "množenjem" jedne kvadratne 2×2 matrice (koja ovisi o kutu rotacije) i jedne jednostupčane matrice (uvijek je to matrica $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$). Zato uvodimo općenito pojam kvadratne $n \times n$ matrice, tj. **kvadratne matrice n-tog reda**. To je n^2 brojeva smještenih u kvadratnu shemu s n **redaka** i n **stupaca**. Također, uvodimo pojam **množenja** matrice n-tog reda s jednostupčanom matricom od n elemenata, tako da elemente svakog retka množimo s odgovarajućim elementima stupca i da rezultat zbrojimo.

Primjer 3.2. [Kvadratna matrica]
Matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

je kvadratna 3×3 matrica, tj. kvadratna matrica trećeg reda. Ima tri retka i tri stupca, sve skupa devet elemenata. Njenim množenjem s jednostupčanom matricom

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

dobije se jednostupčana matrica C prema pravilu:

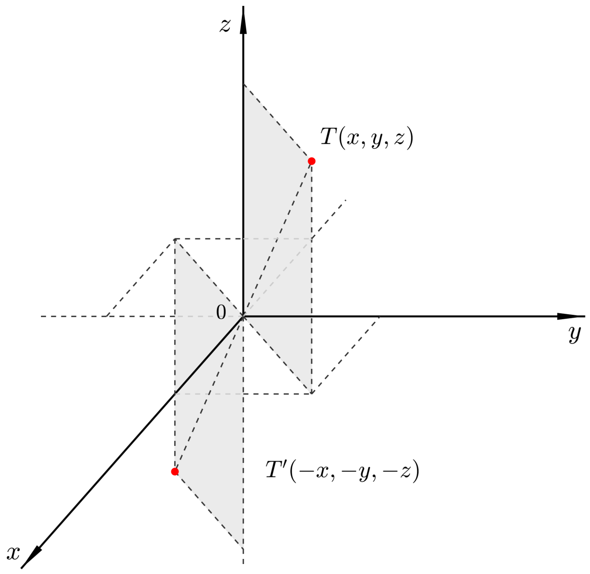
$$\begin{aligned} C &= A \cdot B = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 12 \\ 14 \\ 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

3.3.4 Analitički zapis centralne simetrije prostora ili ravnine

Promatramo centralnu simetriju prostora s obzirom na ishodište koordinatnog sustava (za ravninu je analogno, ali jednostavnije). Vidimo da je $x' = -x$, $y' = -y$ te $z' = -z$, Slika 3.11. Uočimo da se i ta transformacija, kao i rotacija, može zadati pomoću matrica:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{bmatrix}.$$



Slika 3.11: Centralna simetrija prostora

3.3.5 Analitički zapis osne simetrija prostora ili ravnine

Od osnih simetrija ravnine promatramo sljedeće situacije (Slika 3.12):

(i) osna simetrija s obzirom na x-os:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

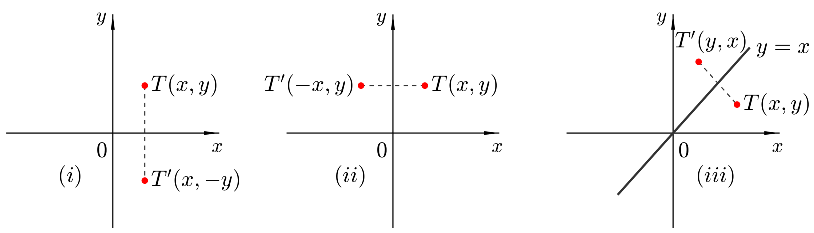
(ii) osna simetrija s obzirom na y-os:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}.$$

(iii) osna simetrija s obzirom na pravac $y = x$:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

Analogno se promatraju osne simetrije prostora.

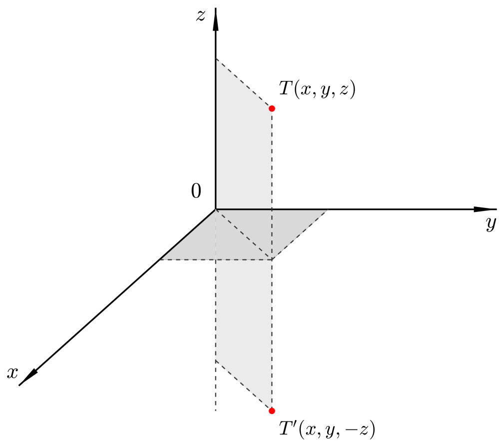


Slika 3.12: Osne simetrije ravnine

3.3.6 Analitički zapis simetrije prostora s obzirom na ravninu

Od simetrija prostora s obzirom na ravninu, dajemo analitički zapis simetrije s obzirom na xy-ravninu (Slika 3.13):

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \end{bmatrix}.$$

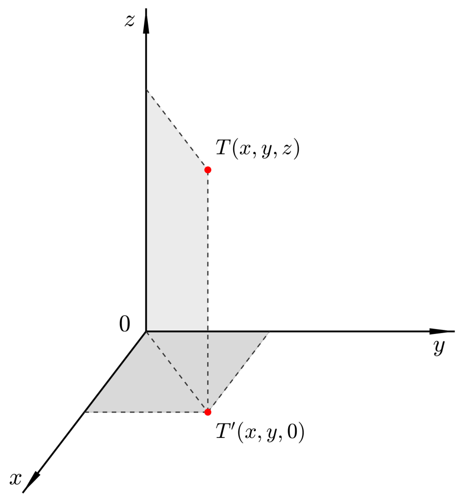


Slika 3.13: Osna simetrija prostora s obzirom na xy-ravninu

Za simetrije prostora s obzirom na preostale koordinatne ravnine vrijede analogne formule.

3.3.7 Analitički zapis projekcije prostora ili ravnine

Opisujemo **projekciju prostora** na xy-ravninu (Slika 3.14):



Slika 3.14: Projekcija prostora na xy-ravninu

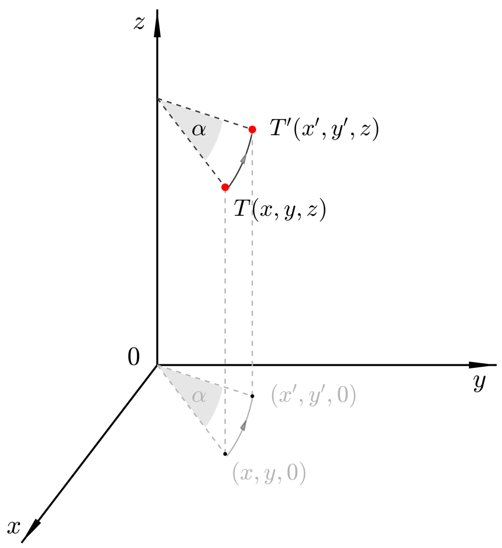
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ostale projekcije, kako prostora na ravnine tako i ravnine na pravce, razmatraju se slično.

3.3.8 Analitički zapis rotacije prostora

Za razliku od ravnine, koju smo rotirali oko ishodišta, prostor rotiramo oko istaknute osi rotacije. Prirodan izbor za to su koordinatne osi, a ovdje dajemo analitički zapis rotacije prostora oko z-osi za kut α, Slika 3.15 (rotacije oko preostalih dvaju koordinatnih pravaca promatraju se analogno):

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y \\ \sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y \\ z \end{bmatrix}.$$



Slika 3.15: Rotacija prostora oko $z-$osi za kut α

3.3.9 Pojam matrice i linearnog operatora

Već smo rekli da je (kvadratna) matrica n-tog reda sastavljena od n^2 brojeva postavljenih u n redaka i n stupaca. Vidjeli smo da se svaka takva matrica može shvatiti kao transformacija n-dimenzionalnog prostora, što smo posebno razmatrali za $n = 2$ i $n = 3$.

Matrica tipa $m \times n$ je pravokutna shema od m redaka i n stupaca. Na primjer,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

je matrica tipa 2×3. Tu matricu možemo shvatiti kao preslikavanje s trodimenzionalnog u dvodimenzionalni prostor zadano formulom:

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x - y \end{bmatrix},$$

što možemo zapisati i kao

$$(x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 4x - y).$$

Preslikavanja s vektorskih prostora u vektorske prostore koja se mogu zapisati pomoću matrica zovu se **linearni operatori**. Naziv dolazi odatle što se u njihovim izrazima pojavljuju samo linearni izrazi.
Ako jednostupčane matrice shvatimo kao vektore, onda linearni operatori preslikavaju vektore u vektore, a ako ih shvatimo kao točke, onda su linearni operatori transformacije koje preslikavaju točke u točke.

Primjer 3.3. [Zapisi linearnog operatora]
Raspišimo preslikavanje prostora kojemu je matrica preslikavanja matrica A iz Primjera 3.2. Ukoliko A shvatimo kao linearni operator koji preslikava točke u točke, dobije se

$$A(x, y, z) = (2x - y + 3z, x + 4z, 3x + 2y - z)$$

ili, u **matričnom zapisu**:

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y + 3z \\ x + 4z \\ 3x + 2y - z \end{bmatrix}.$$

□

Za svaki linearni operator A vrijede sljedeća očita **svojstva linearnih operatora**:

1. $A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, gdje je $\mathbf{0}$ nulvektor, odnosno ishodište koordinatnog sustava (jer je to isto kao i množenje s nulom)

2. $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$ za svaka dva vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$. Ovo svojstvo se vidi izravno iz definicije, a također to je svojstvo distributivnosti množenja i zbrajanja.

3. $A(\lambda \mathbf{x}) = \lambda A(\mathbf{x})$ za svaki broj λ i svaki vektor $\mathbf{x}$.

Ova tri svojstva određuju linearne operatore, tj. ona se obično uzimaju kao definicija linearnog operatora.

3.3.10 Vrste matrica i pripadajućih linearnih operatora

Ovdje se u pravilu bavimo kvadratnim matricama.

Nulmatrica - kvadratna matrica kojoj su svi elementi jednaki nuli. Na primjer:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

je nulmatrica trećeg reda. Pripadajući operator sve točke preslikava u ishodište, odnosno sve vektore u nulvektor.

Jedinična matrica - kvadratna matrica kojoj su na glavnoj dijagonali jedinice, a ostali su elementi nule. Na primjer,

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

je jedinična matrica trećeg reda. Pripadajući operator sve točke, odnosno sve vektore, ostavlja na mjestu.

Dijagonalna matrica - kvadratna matrica kojoj su izvan glavne dijagonale nule, a na dijagonali mogu, ali i ne moraju biti. Na primjer, matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

je dijagonalna, a

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

nije.

Skalarna matrica - dijagonalna matrica kojoj su elementi na dijagonali međusobno jednaki. Na primjer, matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pripadajući operator je homotetija s obzirom na ishodište koja koordinate, odnosno vektore, množi brojem.

Simetrična matrica - kvadratna matrica koja je jednaka svojoj **transponiranoj** matrici, tj. matrici koja se iz nje dobije zamjenom redaka i stupaca. Na primjer, matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

je simetrična - ne mijenja se zamjenom redaka i stupaca, dok matrica

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

nije. Naime, zamjenom redaka i stupaca, dobije se njena transponirana matrica

$$B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

i vidimo da je $B^T \neq B$.

Gornja trokutasta matrica - kvadratna matrica kojoj su ispod glavne dijagonale same nule. Analogno se definira **donja trokutasta matrica**. Na primjer, matrica A je gornja, a matrica B donja trokutasta matrica:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3.4 PRIMJENA MATLAB-A

3.4.1 Zapis i geometrijski prikaz transformacija ravnine

Translacija točke T za vektor translacije $\vec{v}$ svodi se na zbrajanje dvaju vektora, što je već obrađeno u prethodnoj lekciji. Stoga prelazimo na rotaciju u ravnini oko ishodišta, konkretno na Primjer 3.1 (iii): najprije zadajemo kut $\alpha = 60°$ u stupnjevima, a potom ga preračunavamo u radijane (ili smo ga mogli odmah tako zadati). Matricu rotacije definiramo kao i ostale matrice drugog reda, tako da ima dva elementa prije i dva elementa poslije oznake `;` za sljedeći redak:

```
kut = 60
alpha = pi * kut / 180
R = [cos(alpha) -sin(alpha); sin(alpha) cos(alpha)]
```

```
R =
    0.5000   -0.8660
    0.8660    0.5000
```

Točku `Tr` dobivenu rotacijom točke $T(2, 2)$ za kut α određujemo tako da pomnožimo matricu rotacije i radijus vektor točke T:

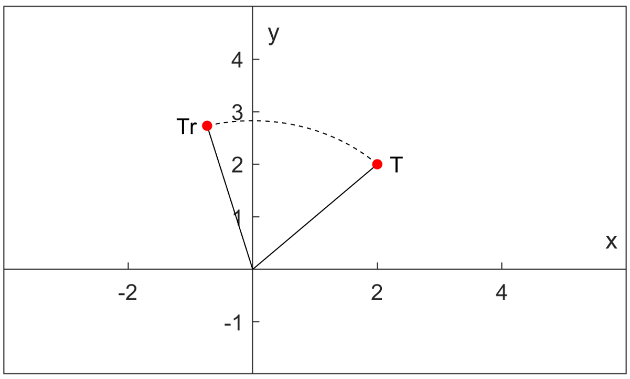
```
T = [2; 2]
Tr = R * T                                 % [-0.7321; 2.7321]
```

Prikažimo ovu rotaciju i slikom. Najprije ćemo prikazati kružni luk između točaka T i Tr, pri čemu nam pomaže da uvedemo kompleksni broj z pridružen točki T jer kružnica kojoj pripada taj luk ima radijus $|z|$. Sam luk definiramo pomoću veličina x i y ovisnih o parametru t. Vrijednosti parametra t zadajemo naredbom `linspace(angle(z), angle(z) + alpha)` koja generira vektor s komponentama između $\arg z$ i $\arg z + \alpha$, a pomoću kojih računamo vrijednosti x i y. Više o naredbi `linspace` može se pronaći u 9.4.5. U posljednjoj liniji koristimo naredbu `plot` za prikaz luka, uz argument `'k--'` za prikaz luka crnom iscrtkanom linijom (ne treba miješati s `'k-'` za prikaz crnom punom linijom):

```
z = 2 + 2*i
t = linspace(angle(z), angle(z) + alpha)
x = abs(z) * cos(t)
y = abs(z) * sin(t)
plot(x, y, 'k--')
```

Nastavljamo dalje s crtanjem drugih elemenata prikaza:

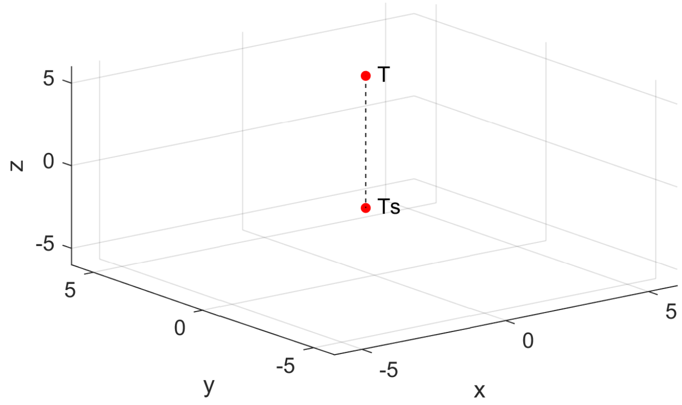
```
hold on
plot([0 T(1)], [0 T(2)], 'k-', [0 Tr(1)], [0 Tr(2)], 'k-')
pts = [T Tr]
plot(pts(1, :), pts(2, :), 'r.', 'MarkerSize', 16)
text(pts(1, :) + [0.2, -0.5], pts(2, :), {'T', 'Tr'})
xlim([-4 6]); ylim([-2 5])
ax = gca
ax.XAxisLocation = 'origin'
ax.YAxisLocation = 'origin'
xlabel('x'); ylabel('y')
```



3.4.2 Zapis i geometrijski prikaz transformacija prostora. Naredba `plot3`

Kod transformacija prostora, umjesto `plot`, koristi se naredba `plot3` za vizualni prikaz u tri dimenzije. Dajemo primjer simetrije točke $T(2,3,4)$ s obzirom na xy-ravninu:

```
S = [1 0 0; 0 1 0; 0 0 -1]
T = [2; 3; 4]
Ts = S * T                                          % [2, 3, -4]
pts = [T Ts]
plot3(pts(1,:), pts(2,:), pts(3,:), 'r.', 'MarkerSize', 16)
hold on
plot3(pts(1,:), pts(2,:), pts(3,:), 'k--')
text(pts(1, :) + 0.4, pts(2, :), pts(3, :), {'T', 'Ts'})
xlim([-6 6]); ylim([-6 6]); zlim([-6 6])
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z')
grid on
```



3.4.3 Zadavanje nekih specijalnih matrica. Naredbe zeros, eye, diag i transpose

Za generiranje nulmatrice i jedinične matrice koristimo redom zeros i eye, uz navođenje reda matrice:

```
O = zeros(3)
```

```
O =
     0     0     0
     0     0     0
     0     0     0
```

```
I = eye(3)
```

```
I =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
```

Skalarnu matricu zadajemo tako da jediničnu matricu pomnožimo odgovarajućim skalarom:

```
A = 2*eye(3)
```

```
A =
```

```
     2     0     0
     0     2     0
     0     0     2
```

Za definiranje dijagonalne matrice koristimo naredbu `diag`, uz prethodno zadavanje vektora dijagonalnih elemenata:

```
dijagonala = [2 -3 -1]
A = diag(dijagonala)
```

```
A =
     2     0     0
     0    -3     0
     0     0    -1
```

Transponiranu matricu od A daje naredba `transpose(A)` ili njoj ekvivalentna naredba/oznaka `A.'`:

```
A = [3 -4 2; 5 1 -1]
A'
At = transpose(A)
```

```
A.’ =
     3     5
    -4     1
     2    -1
At =
     3     5
    -4     1
     2    -1
```

Na kraju, pogledajmo primjer dviju matrica, od koji je jedna simetrična, a druga nije. Provjeru simetričnosti provodimo pomoću naredbe `issymmetric` koja vraća logičku vrijednost 1, tj. `true` ako je matrica simetrična, a 0, tj. `false` ukoliko nije.

```
A = [2 1 3; 1 -3 0; 3 0 -1]
B = [2 1 2; 1 -3 0; 3 0 -1]
provjeraA = issymmetric(A)
provjeraB = issymmetric(B)
```

```
provjeraA =
  logical
   1

provjeraB =
  logical
   0
```

```
A = [2 1 3; 1 -3 0; 3 0 -1]
B = [2 1 2; 1 -3 0; 3 0 -1]
```

3.5 PITANJA I ZADATCI

1. Zapišite pomoću koordinata i matrica simetriju ravnine s obzirom na pravac s jednadžbom $y = -x$ (simetrala II i IV kvadranta).

2. Napišite matrice sljedećih preslikavanja prostora:
   (i) simetrija s obzirom na yz-ravninu
   (ii) projekcija na xz-ravninu
   (iii) rotacija oko x-osi za kut α.

3. Napišite matricu simetrije prostora s obzirom na ravninu koju razapinju z-os i simetrala xy-ravnine, tj. pravac $y = x$.

4. Kakva matrica nastaje transponiranjem jednostupčane, a kakva transponiranjem jednoretčane matrice?

5. Kakva matrica nastaje transponiranjem gornje trokutaste matrice?

6. (i) Je li svaka dijagonalna matrica simetrična?
   (ii) Je li svaka simetrična matrica dijagonalna?

4 ALGEBRA MATRICA. DETERMINANTA

U lekciji se obrađuju svojstva zbrajanja i množenja matrica, uvodi se pojam inverzne matrice i daju uvjeti za postojanje inverza te se uvodi pojam determinante matrice i njena veza s inverznom matricom.

4.1 PRIPADNI PROBLEM

Ako zamislimo dvije matrice kao linearne operatore, tj. kao preslikavanja s prostora u prostor, onda se prirodno nameću sljedeća pitanja: što je sa zbrojem tih dvaju preslikavanja, a što s kompozicijom, tj. s preslikavanjem koje se dobije tako da prvo djeluje jedan od operatora, a potom da na rezultat djeluje drugi. Također, zanima nas postoji li za zadano linearno preslikavanje njemu inverzno preslikavanje i, ako postoji, kako se može zapisati. Ti se problemi rješavaju pojmovima zbroja i umnoška matrica i svojstvima tih operacija.

4.2 POTREBNO PREDZNANJE

Ovo je potpuno novo gradivo, koje se oslanja na gradivo iz prethodne lekcije. Za razumijevanje treba ponoviti svojstva operacija zbrajanja i množenja realnih brojeva.

4.3 NOVE DEFINICIJE I TVRDNJE S PRIMJERIMA

4.3.1 Zbrajanje matrica

Treba uočiti sljedeće činjenicu: **zbrajanje matrica** potpuno je analogno zbrajanju brojeva i provodi se zbrajanjem odgovarajućih elemenata matrice. Ipak, treba imati na umu da se zbrajaju (i oduzimaju) matrice istog reda, da je broju nula analogon nulmatrica (oznaka O), a analogon suprotnog broja **suprotna matrica** - matrica koja se dobije iz početne tako da se svakom elementu promijeni predznak, na primjer:

$$-\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, imamo ova očita **svojstva zbrajanja matrica**:

1. Komutativnost: $A + B = B + A$
2. Asocijativnost: $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. **Neutralni element za zbrajanje**: $A + O = A$
4. Suprotni element: $A + (-A) = 0$.

4.3.2 Množenje matrica

Množenje matrica nije analogno množenju brojeva niti se tako jednostavno provodi. Već smo vidjeli kako se matrica množi s jednostupčanom matricom. Ponavljajući taj postupak sa svakim stupcem druge matrice, dobijemo produkt matrica.

Primjer 4.1. [Množenje matrica]
Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

odakle vidimo da je, općenito,

$$AB \neq BA,$$

tj. množenje matrica, za razliku od množenja brojeva, nije komutativno. To znači da kompozicija linearnih operatora nije komutativna. □

Iako je kompliciranije, množenje matrica je prirodno i do njega se analogno dolazi kao do zbrajanja: kako zbrajanje odgovara zbrajanju pripadnih linearnih operatora, tako umnožak matrica odgovara njihovom uzastopnom djelovanju, tj. **kompoziciji**.

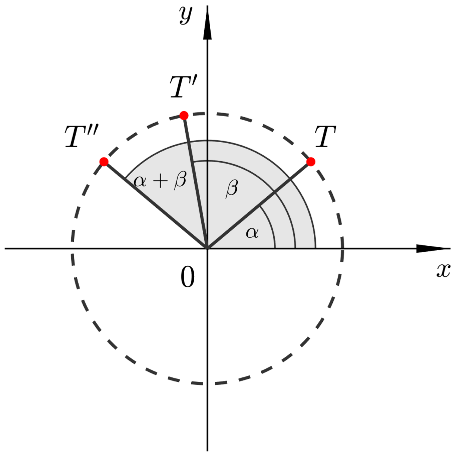
Primjer 4.2. [Umnožak matrica rotacije ravnine]
Rotacija ravine oko ishodišta za kut $\alpha + \beta$ odgovara kompoziciji rotacija za kutove α i β, a matrica rotacije za $\alpha + \beta$ dobije se kao umnožak matrica rotacija za α i β:

$$\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}.$$

Uočimo da je u ovom slučaju umnožak komutativan, što odgovara tome da je svejedno hoćemo li najprije rotirati ravninu za kut α, a potom za β ili obratno (Slika 4.1).



Slika 4.1: Rotacija ravnine oko ishodišta za kutove α, β i $\alpha + \beta$

□

Neutralni element za množenje: ono što je broj jedan za množenje brojeva, to je jedinična matrica I za množenje *kvadratnih* matrica. To znači da za svaku kvadratnu matricu A istog reda kao i I vrijedi

$$AI = IA = A.$$

Množenje matrice brojem: matricu množimo brojem tako da joj svaki element pomnožimo tim brojem. Na primjer,

$$2\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 8 \\ 6 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Uočimo da brojem možemo množiti bilo koju matricu, ne samo kvadratnu. Primijetimo također da se skalarna matrica dobije množenjem jedinične matrice nekim brojem. Na primjer,

$$3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Skalarne se matrice ponašaju kao i obični brojevi (na primjer, one komutiraju sa svakom matricom).

4.3.3 Inverzni element za množenje matrica – inverzna matrica

Svaki realni broj a različit od nule ima inverzni element s obzirom na množenje - to je recipročni element a^{-1}, tj. $\frac{1}{a}$ koji je jednoznačno određen uvjetom $a \cdot a^{-1} = 1$, a također i uvjetom $a^{-1} \cdot a = 1$. Analogno tome, **inverzna matrica** matrice A je matrica A^{-1} takva da vrijedi

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Iz ovih jednakosti može se vidjeti da problem određivanja inverzne matrice ima smisla samo ako je matrica A *kvadratna* matrica i da tada nužno i A^{-1}, ukoliko postoji, također mora biti kvadratna i to istog reda kao i A.

Očite su sljedeće činjenice:

1. I je sama sebi inverzna jer je $I \cdot I = I$, slično kako je $1 \cdot 1 = 1$

2. Nulmatrica O nema inverzne matrice jer je $A \cdot O = O \cdot A = O$ za svaku matricu A istog reda kao i O, slično kako je $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ za sve realne brojeve a.

Postavlja se pitanje koje kvadratne matrice imaju inverznu matricu i kako se inverzne matrice određuju.

Primjer 4.3. [Inverz matrice drugog reda]
Odredimo, ako postoji, inverznu matricu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Treba naći matricu B drugog reda tako da bude $AB = I$ (mogli bismo gledati i $BA = I$). Stavimo

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}.$$

Treba odrediti brojeve x, y, u i v. Iz uvjeta $AB = I$, tj. iz

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dobijemo

$$\begin{aligned} 2x - u &= 1 \\ 2y - v &= 0 \\ x &= 0 \\ y &= 1, \end{aligned}$$

odnosno $x = 0$, $y = 1$, $u = -1$, $v = 2$ pa je

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lako je vidjeti da je B zaista inverzna matrica od A i, također, da bismo isti rezultat dobili da smo razmatrali uvjet $BA = I$. □

Slično kako smo postupili u prethodnom primjeru, mogli bismo postupiti za svaku kvadratnu matricu

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

drugog reda. Dobili bismo sljedeću **formulu za inverznu matricu matrice drugog reda** (kasnije ćemo dati formulu za inverznu matricu općenitog reda):

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Uočavamo pravilo za određivanje inverza matrice drugog reda:

1. Zamijenimo elemente na glavnoj dijagonali.
2. Elementima na sporednoj dijagonali promijenimo predznake.
3. Tako dobivenu matricu podijelimo s $ad-bc$.

Također, iz gornje formule vidimo da vrijedi sljedeći **uvjet za postojanje inverza matrice drugog reda**:

$$ad-bc \neq 0.$$

Naime, u suprotnom bismo dijelili s nulom, što nije dozvoljeno. Dakle, matrice za koje je $ad-bc=0$ *nemaju inverz*. Taj se uvjet može zapisati kao $ad=bc$, odnosno kao $a:c=b:d$, što znači da su retci matrice, a ujedno i stupci, proporcionalni.

4.3.4 Determinanta

Matrice drugog reda: vidjeli smo važnost izraza $ad-bc$ za (kvadratnu) matricu drugog reda

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Taj se izraz zove **determinanta matrice drugog reda** A i označava kao $\det A$, katkad i kao $|A|$, odnosno

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Vidimo da je

$$\det A \neq 0$$

uvjet za postojanje inverza matrice drugog reda. Taj uvjet vrijedi *za sve kvadratne matrice*, a ne samo za matrice drugog reda.

Matrice trećeg reda: determinanta matrice trećeg reda može se izračunati pomoću determinante matrice drugog reda **razvojem po nekom retku ili stupcu**, na primjer, razvojem po prvom retku:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Primjer 4.4. [Determinanta matrice trećeg reda]

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} &= 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2(0-8) + (-1-12) + 3(2-0) \\ &= -23.\end{aligned}$$

□

Slično bismo dobili nekim drugim razvojem, na primjer po drugom stupcu. Pritom se koristimo pravilom da je na presjeku i-tog retka i j-tog stupca, tj. na mjestu elementa a_{ij}, predznak $(-1)^{i+j}$ i da izbacujemo elemente tog retka i tog stupca.

Primjer 4.5. [Determinanta matrice trećeg reda]
Računamo determinantu razvojem po drugom stupcu (i dobivamo isti rezultat kao u Primjeru 4.4):

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} &= -(-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -13 + 0 - 10 \\ &= -23.\end{aligned}$$

Vidimo da je ovaj postupak lakši od onog u Primjeru 4.4 jer, od tri determinante drugog reda, moramo računati samo dvije jer se jedna od njih množi nulom. Zato općenito treba raditi s onim stupcem, odnosno retkom, u kojemu ima najviše nula. □

Matrice bilo kojeg reda: **determinanta matrice bilo kojeg reda** definira se tako da se razvija po nekom retku ili stupcu pa se tako svodi na determinante nižeg reda. To pokazujemo na primjeru determinante četvrtog reda, uz napomenu da je za matrice reda većeg od tri determinantu bolje računati jednom drugom metodom koju ćemo obrađivati u šestoj lekciji.

Primjer 4.6. [Determinanta matrice četvrtog reda]

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= 2\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2\cdot 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Tu smo prvo determinantu četvrtog reda razvili po prvom retku i tako sveli na dvije determinante trećeg reda (jer su samo dva elementa tog retka različita od nule). Potom smo prvu od determinanta trećeg reda razvili po trećem stupcu, a drugu po drugom retku (a mogli smo i po trećem stupcu) i dobili rezultat. Ovo općenito nije optimalan postupak za računanje determinante, kako ćemo vidjeti poslije. □

4.3.5 Formula za računanje inverzne matrice

Inverz matrice trećeg reda: pravilo za računanje inverzne matrice objašnjavamo na primjeru.

Primjer 4.7. [Inverz matrice trećeg reda]
Određujemo inverz matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. korak Računanje determinante: $\det A = -23$, što znamo od prije.

2. korak Određivanje transponirane matrice od A:

$$A^{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. korak Određivanje **adjungirane matrice** A^* matrice A: adjungiranu matricu određujemo tako da u transponiranoj matrici svaki pojedini element zamijenimo determinantom drugog reda koju dobijemo brisanjem retka i stupca tog elementa, pomnoženom s ± 1 prema već rečenom pravilu:

$$A^* = \begin{bmatrix} -8 & 5 & -4 \\ 13 & -11 & -5 \\ 2 & -7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na primjer, tu smo element -8 dobili kao $+\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$, element -5 kao $-\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ itd.

4. korak Računanje inverzne matrice korištenjem formule $A^{-1} = \frac{1}{\det A}A^*$:

$$A^{-1} = -\frac{1}{23}\begin{bmatrix} -8 & 5 & -4 \\ 13 & -11 & -5 \\ 2 & -7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lako se provjeri izravnim množenjem da vrijedi $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. □

Inverz matrice bilo kojeg reda: pokazuje se da je, kao i u prethodnim slučajevima, $\det A \neq 0$ uvjet za postojanje inverza matrice A bilo kojeg reda te da vrijedi sljedeća **formula za inverznu matricu**:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*,$$

gdje se adjungirana matrica A^* od A definira analogno kao za matrice trećeg reda. U šestoj ćemo lekciji opisati jednu bržu metodu za određivanje inverza matrice.

Dajemo i sljedeća **svojstva množenja matrica** - prva tri svojstva su očita, a preostala nisu:

1. Neutralni element za množenje: $AO = OA = O$
2. Jedinični element za množenje: $AI = IA = A$
3. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
4. Asocijativnost: $(AB)C = A(BC)$
5. Distributivnost: $A(B + C) = AB + AC$
6. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
7. $(AB)^t = B^t A^t$
8. $(AB)^* = B^* A^*$
9. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Primjer 4.8. [Inverzi matrica transformacija ravnine i prostora] Odredimo inverze matrica povezanih s važnim transformacijama prostora ili ravnine:

(i) geometrijski, tj. koristeći se činjenicom da inverzna matrica odgovara inverznoj transformaciji.

(ii) analitički, tj. koristeći se formulom

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*.$$

1. Rotacija ravnine oko ishodišta za kut α

   (i) Inverz rotacije za kut α suprotno kazaljci na satu jest rotacija za kut α u skladu s kazaljkom na satu, a to je upravo rotacija za kut $-\alpha$ suprotno kazaljci na satu. Na Slici 4.2 točka T' dobivena je rotacijom točke T oko ishodišta za kut α suprotno kazaljci sata, a točka T'' rotacijom za kut α u skladu s kazaljkom na satu.
   Dakle, ako je

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

onda je

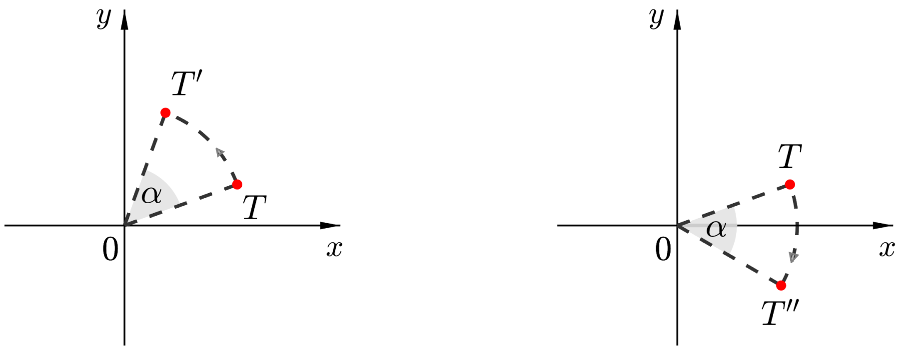
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Uočimo da smo mogli razmišljati i ovako: inverz rotacije za kut α je rotacija za kut $360^\circ - \alpha$ (sve suprotno od kazaljke na satu).

(ii) Tu je

$$\det A = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - (-\sin\alpha)\cdot \sin\alpha = (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$$

pa se, korištenjem formule za inverz matrice drugog reda, dobije isti rezultat kao geometrijskim pristupom.



Slika 4.2: Rotacija ravnine oko ishodišta za kut α, odnosno $-\alpha$

2. Centralna simetrija prostora s obzirom na ishodište

   (i) Očito je da je centralna simetrija sama sebi inverzna, pa je tu $A^{-1} = A$.

   (ii) Zaključak do kojeg smo došli geometrijskim pristupom lako se provjeri i analitički invertiranjem pripadne matrice transformacije

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Simetrija ravnine s obzirom na koordinatne osi i os y = x

   Pokazujemo na primjeru simetrije ravnine obzirom na pravac $y = x$. Ova je transformacija također inverzna sama sebi pa je

$$A^{-1} = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

   što se lako provjeri i geometrijski i analitički. Analogno zaključujemo i u slučaju simetrija s obzirom na koordinatne osi.

4. Simetrija prostora s obzirom na xy-ravninu

Svaka je simetrija sama sebi inverzna pa vrijedi

$$A^{-1} = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. Projekcija prostora na xy-ravninu

   (i) Ako znamo projekciju neke točke na ravninu, tada ne možemo sa sigurnošću rekonstruirati tu točku jer beskonačno mnogo točaka - čitav pravac - ima istu projekciju. To znači da projekcija nema inverznu transformaciju i zato matrica transformacije nema inverznu matricu.

   (ii) Tu je

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   pa je očito $\det A = 0$ (razvoj po trećem retku ili stupcu). Stoga A^{-1} ne postoji.

6. Rotacija prostora oko z-osi za kut α

   Tu je

   $$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   pa, kao i za rotaciju ravnine oko ishodišta, geometrijskim argumentom dobijemo

   $$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

   što se lako provjeri i analitički. □

4.4 PRIMJENA MATLAB-A

4.4.1 Zadavanje matrica i računanje s njima

U prethodnim lekcijama već smo koristili matrice, a sada ćemo ih obraditi detaljnije. Matrica s 2 retka i 3 stupca zadaje se kao u primjeru:

```
A = [5 -3 2; 7 4 1]
```

```
A =
     5    -3     2
     7     4     1
```

Ukoliko želimo dobiti neki od redaka ili stupaca matrice, odnosno pojedini element matrice, koristimo se naredbama poput ovih:

```
A(2, :)                                        % [7 4 1]
A(:, 3)                                         % [2; 1]
A(2, 3)                                              % 1
```

Matricu možemo zadati i tako da najprije zadamo vektore, a potom od njih načinimo matricu:

```
u1 = [5 -3 2]
u2 = [7 4 1]
A = [u1; u2]                           % [5 -3 2; 7 4 1]
```

ili

```
v1 = [5; 7]
v2 = [-3; 4]
v3 = [2; 1]
A = [v1 v2 v3]                         % [5 -3 2; 7 4 1]
```

Matrice zbrajamo, oduzimamo i množimo skalarom korištenjem operacija $+$, $-$ i $*$. Množenje matrica također se provodi korištenjem znaka $*$, što pokazujemo na Primjeru 4.1. Najprije računamo AB:

```
A = [2 -1; 1 0]
B = [3 2; 4 -2]
AB = A * B                                  % [2 6; 3 2]
```

Podsjetimo da se da množenje matrica općenito nije komutativno što potvrđuje i ovaj primjer:

```
BA = B * A                                % [8 -3; 6 -4]
```

4.4.2 Determinanta, adjungirana i inverzna matrica. Naredbe `det`, `adjoint` i `inv`

Determinanta, adjungirana i inverzna matrica dobivaju se korištenjem naredbi `det`, `adjoint` i `inv`, redom. Za matricu A iz Primjera 4.5 i 4.7 imamo

```
A = [2 -1 3; 1 0 4; 3 2 -1]
det(A)                                             % -23
adjA = adjoint(A)
invA = inv(A)
```

```
adjA =
   -8.0000    5.0000   -4.0000
   13.0000  -11.0000   -5.0000
    2.0000   -7.0000    1.0000
invA =
    0.3478   -0.2174    0.1739
   -0.5652    0.4783    0.2174
   -0.0870    0.3043   -0.0435
```

Primijetimo da je rezultat izražen decimalnim brojevima. To je zato što MATLAB za zadani prikaz brojeva koristi tzv. `short` prikaz brojeva, u kojem brojeve prikazuje u decimalnom zapisu, zaokružene na četiri decimalna mjesta. Ako želimo prikazati rezultat pomoću razlomaka, tj. cijelih brojeva, koristimo naredbu `format` s argumentom `rational`:

```
format rational
invA = inv(A)
```

```
invA =
    8/23          -5/23          4/23
  -13/23          11/23          5/23
   -2/23           7/23         -1/23
```

Pogledajmo što se događa ako pokušamo izračunati determinantu i invertirati matricu koja nema inverznu matricu, tj. matricu čija je determinanta jednaka nuli:

```
A = [3 6; 1 2]
det(A)                                                 % 3.3307e-16
invA = inv(A)
```

```
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.
Results may be inaccurate. RCOND =  4.625929e-18.

invA =
   1.0e+16 *
         0.6005   -1.8014
        -0.3002    0.9007
```

Vidimo da za determinantu nismo dobili nulu već broj blizu nule te da je MATLAB upozorio na to da bi matrica mogla biti singularna. Ukoliko bismo pomoću naredbe `sym` preveli numeričke vrijednosti elemenata gornje matrice u simboličke objekte, dobili bismo točan rezultat za determinantu i beskonačne vrijednosti za elemente "inverzne" matrice:

```
symA = sym(A)
det(symA)                                                        % 0
invsymA = inv(symA)
```

```
invsymA =
    [Inf, Inf]
    [Inf, Inf]
```

4.4.3 Zadavanje simboličkih veličina. Naredba `syms`

Pokažimo i to da MATLAB može obaviti simbolički račun s veličinama koje nisu zadane konkretnim vrijednostima. Takve veličine zadajemo naredbom `syms`, koja se od naredbe `sym` razlikuje po tome što

stvara simboličke varijable (za razliku od `sym` koja prevodi numeričku vrijednost u pripadni simbolički objekt).
Definirajmo opću matricu drugog reda te izračunajmo njen inverz korištenjem naredbe `inv`:

```
syms a b c d
A = [a b; c d]
invA = inv(A)
```

```
invA =
    [ d/(a*d - b*c), -b/(a*d - b*c)]
    [-c/(a*d - b*c),  a/(a*d - b*c)]
```

Sada definirajmo matricu `invAformula` pomoću *formule* za inverznu matrice iz ove lekcije:

```
invAformula = adjoint(A) / det(A)
```

```
invAformula =
    [ d/(a*d - b*c), -b/(a*d - b*c)]
    [-c/(a*d - b*c),  a/(a*d - b*c)]
```

Vidimo da je rezultat identičan onomu dobivenom preko naredbe `inv`.
Provjeru možemo obaviti i naredbom `isAlways` koja uspoređuje do koje su mjere dva logička izraza jednaka:

```
provjera = isAlways(invAformula == invA)
```

```
provjera =
  2×2 logical array
   1   1
   1   1
```

Rezultat kojeg smo dobili (same jedinice) govori da je matrica `invAformula` jednaka matrici `inv(A)` dobivenoj naredbom `inv`.
Ukoliko bismo pak naredbom `isAlways`, na primjer, usporedili dvije matrice koje se razlikuju na jednom (ili više) mjesta, rezultat bi ukazao na ta mjesta:

```
A = [3 1; -2 4]
B = [3 2; -2 4]
provjera = isAlways(A == B)
```

```
provjera =
  2×2 logical array
   1   0
   1   1
```

4.5 PITANJA I ZADATCI

1. Neka je A matrica simetrije ravnine s obzirom na x-os, a B s obzirom na y-os. Izračunajte AB i BA. Rezultat komentirajte i geometrijski.

2. Neka je A matrica simetrije ravnine s obzirom na x-os, a C s obzirom na pravac $y = x$. Izračunajte AC i CA. Rezultat komentirajte i geometrijski.

3. Neka je C matrica simetrije ravnine s obzirom na pravac $y = x$, a D s obzirom na $y = -x$. Izračunajte CD i DC. Rezultat komentirajte i geometrijski.

4. Neka je C matrica simetrije ravnine s obzirom na pravac $y = x$, a E matrica rotacije ravnine za kut od $60°$ oko ishodišta. Izračunajte CE i EC. Rezultat komentirajte i geometrijski.

5. Riješite Zadatak 4. ako je E bilo koji kut α. Komentirajte ako je $\alpha = 90°$, $\alpha = 180°$, odnosno $\alpha = 270°$.

6. Koliko množenja treba izvršiti kod računanja determinante drugog reda, a koliko kod računanja determinante trećeg reda (recimo, razvojem po prvom retku)? Pokušajte razmišljanje nastaviti za determinante četvrtog i većeg reda.

7. Provjerite množenjem istinitost formule $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Uputa: treba množiti matricu AB s matricom $B^{-1}A^{-1}$ (s lijeva i zdesna).

8. Formulirajte pravilo za determinantu dijagonalne matrice (bilo kojeg reda). Uputa: odgovor treba biti u terminima elemenata na dijagonali. Koji je uvjet da bi determinanta bila različita od nule?

9. Formulirajte pravilo za inverz dijagonalne matrice (bilo kojeg reda). Koji je uvjet za postojanja inverza?

5 SKALARNI, VEKTORSKI I MJEŠOVITI UMNOŽAK VEKTORA

U lekciji se obrađuju skalarni, vektorski i mješoviti umnožak vektora i njihova veza s kutom među vektorima, površinom paralelograma kojeg razapinju dva vektora i obujmom paralelepipeda kojeg razapinju tri vektora.

5.1 PRIPADNI PROBLEM

Vidjeli smo da rezultanta djelovanja dviju sila ne ovisi samo o njihovim veličinama već i o kutu pod kojim one djeluju. Problem određivanja tog kuta matematički se rješava pomoću skalarnog umnoška.
Pokus pokazuje da na električnu česticu koja se giba u nekom magnetskom polju u svakoj točki djeluje inducirana sila koja je okomita i na smjer brzine čestice u toj točki i na smjer sile magnetskog polja, a po veličini je proporcionalna veličini sile magnetskog polja, veličini brzine čestice i naboju čestice. Ako se fizikalne jedinice usklade, onda je koeficijent proporcionalnosti sinus kuta između vektora brzine i sile magnetskog polja. Dakle, sila je najveća ako je brzina okomita na magnetsko polje, a iščezava ako brzina i magnetsko polje imaju isti smjer. To se matematički rješava pojmom vektorskog umnoška vektora.
Pomoću vektorskog umnoška lako se računa površina paralelograma što ga razapinju dva vektora, a pomoću mješovitog obujam paralelepipeda što ga razapinju tri vektora.

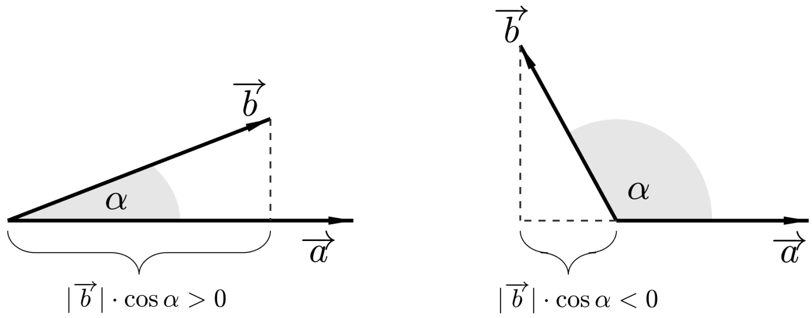
5.2 POTREBNO PREDZNANJE

Ovo je potpuno novo gradivo. Za razumijevanje je potrebno ponoviti pojam vektora i kuta među vektorima te pojam determinante.

5.3 NOVE DEFINICIJE I TVRDNJE S PRIMJERIMA

5.3.1 Skalarni umnožak vektora

Ova je tema blisko povezana s pojmom kuta među vektorima i s pojmom **projekcije** vektora na vektor. Pogledajmo dva primjera vektora i kuta među njima (Slika 5.1).



Slika 5.1: Projekcija vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$

Vidimo da se izraz

$$\left|\vec{b}\right| \cos\alpha$$

prirodno javlja pri projekciji vrha vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$. Točnije, taj izraz mjeri duljinu projekcije vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$ skupa s predznakom, koji je pozitivan ako je kut šiljast, tj. ako projekcija ima isto usmjerenje kao i $\vec{a}$, a negativan ako je kut tup, tj. ako projekcija ima suprotno usmjerenje. Ako gornji izraz pomnožimo s $|\vec{a}|$, dobijemo **skalarni umnožak (produkt)** $\vec{a} \cdot \vec{b}$ vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\alpha.$$

Vrijede sljedeća **svojstva skalarnog množenja** - prva tri su očita, a posljednje nije:

1. Komutativnost: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$
3. $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ jer je $\cos 0^\circ = 1$
   $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$ jer je $\cos 90^\circ = 0$
4. Distributivnost na zbrajanje: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$. Pri zapisu desne strane ove jednakosti ne trebaju zagrade jer je dogovor da je operacija skalarnog množenja višeg reda u odnosu na zbrajanje.

Koristeći se svojstvima skalarnog množenja vektora, za analitički zapisane vektore prostora

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$
$$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$

dobijemo **formulu za skalarni umnožak**:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Ovo je formula za vektore trodimenzionalnog prostora. Analogne formule postoje za vektore iz vektorskog prostora bilo koje dimenzije.

Primjer 5.1. [Skalarni umnožak vektora]
Izračunajmo skalarni umnožak dvaju vektora i odredimo je li kut među njima šiljast, pravi ili tup:

(i) Ako je $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$, onda je

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 4 = 11.$$

Tu je skalarni umnožak pozitivan, a to znači da je kut među vektorima šiljast.

(ii) Ako je $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$, onda je

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = 0.$$

Tu je skalarni umnožak jednak nuli, a to znači da su vektori okomiti.

(iii) Ako je $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k}$, onda je

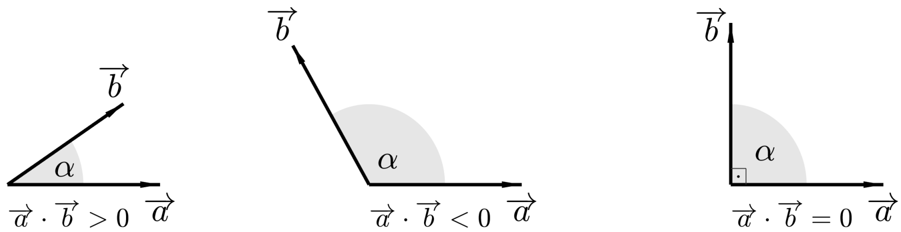
$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-4) = -3.$$

Tu je skalarni umnožak negativan, a to znači da je kut među vektorima tup. □

Vrijedi i općenito (Slika 5.2):

- kut među vektorima je šiljast ako i samo ako je skalarni umnožak veći od nule.
- kut među vektorima je tup ako i samo ako je skalarni umnožak manji od nule.
- vektori su okomiti ako i samo ako je skalarni umnožak jednak nuli - to je **uvjet okomitosti dvaju vektora**. Na primjer, različiti jedinični vektori međusobno su okomiti, i zaista vrijedi

$$\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{i} = 0.$$



Slika 5.2: Odnos skalarnog umnoška i kuta među vektorima

Uvjet okomitosti vektora riječima možemo izreći ovako:

Vektori su okomiti ako i samo ako je
njihov skalarni umnožak jednak nuli.

Dalje, ako promatramo *skalarni umnožak vektora sa samim sobom*, dolazimo do veze između duljine vektora i skalarnog umnoška: za $\vec{v} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}$ iz $\vec{v} \cdot \vec{v} = a^2 + b^2 + c^2 = \left|\vec{v}\right|^2$ dobijemo

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}.$$

Pomoću skalarnog produkta možemo lako odrediti **kut među vektorima**, a ne samo provjeriti je li taj kut šiljast, tup ili pravi. Naime, vrijedi:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right|},$$

gdje je α mjera kuta među vektorima. Primijetimo da je ovo samo malo drukčije napisana formula za skalarni produkt.

Primjer 5.2. [Kut među vektorima]
Za vektore iz Primjera 5.1 vrijedi:

(i) Tu je $\cos\alpha = \frac{11}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{29}} = \frac{11}{29}$ pa je, približno, $\alpha = 67°43'$.

(ii) Tu je $\cos\alpha = 0$ pa je $\alpha = 90°$, kako smo i prije rekli.

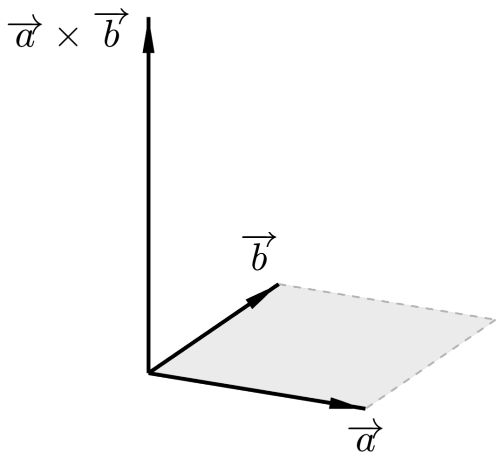
(iii) Tu je $\cos\alpha = \frac{-3}{29}$ pa je, približno, $\alpha = 95°56'$. □

5.3.2 Vektorski umnožak vektora

Oslanjajući se na fizikalnu predodžbu o sili koja se javlja pri gibanju električne čestice kroz magnetsko polje, dolazimo do *geometrijske* definicije **vektorskog umnoška (produkta)** dvaju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kao vektora

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

zadanog smjerom, duljinom i orijentacijom ovako (Slika 5.3):



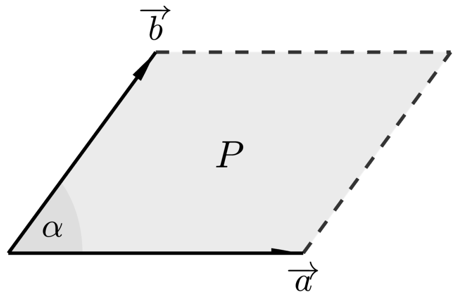
Slika 5.3: Vektorski umnožak vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$

1. Smjer: $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ okomit je i na $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$.

2. Duljina: jednaka je površini P paralelograma razapetog vektorima $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$, tj.

$$\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = P = \left|\overrightarrow{a}\right| \left|\overrightarrow{b}\right| \sin\alpha,$$

   gdje je α kut među vektorima $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$, Slika 5.4.



Slika 5.4: Paralelogram razapet vektorima $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$

3. Orijentacija: poštuje **pravilo desne ruke** - gledajući s vrha vektora $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, gibanje od vektora $\overrightarrow{a}$ prema vektoru $\overrightarrow{b}$ kroz kut α odvija se suprotno kazaljci na satu. Drugim riječima, vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ čine konfiguraciju poput $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ i $\overrightarrow{k}$.

Primijetimo da ovako definiran vektorski produkt vektora ima smisla samo za vektore iz trodimenzionalnog vektorskog prostora.
Iz formule $\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = \left|\overrightarrow{a}\right| \left|\overrightarrow{b}\right| \sin\alpha$ dobije se važan **uvjet kolinearnosti dvaju vektora**:

Vektori su kolinearni ako i samo ako je
njihov vektorski umnožak jednak nulvektoru.

Naime, kažemo da su dva vektora različita od nulvektora kolinearna ako imaju isti smjer, tj. ako se jedan od njih može dobiti iz drugoga množenjem sa skalarom. To znači da je kut među njima $0°$ (ista orijentacija) ili $180°$ (suprotna orijentacija). Ako je jedan od dvaju vektora nulvektor, onda se kut među njima ne definira, ali, prema dogovoru, uzimamo da je vektorski umnožak nula.

Vrijede sljedeća **svojstva vektorskog množenja** - prva četiri su očita, a posljednje nije:

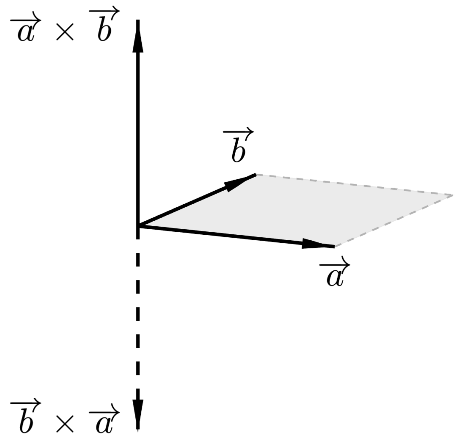
1. Antikomutativnost: $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$. Ovo svojstvo proizlazi iz definicije orijentacije vektorskog produkta (Slika 5.5).

2. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ jer je kut kojeg vektor zatvara sa samim sobom jednak nula-kutu. Svojstvo također proizlazi iz prvog svojstva, ako stavimo $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}$.

3. $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$

4. $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$
   $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

5. Distributivnost na zbrajanje: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$. Pri zapisu desne strane ove jednakosti ne trebaju zagrade jer je dogovor da je operacija vektorskog množenja višeg reda u odnosu na zbrajanje.



Slika 5.5: Svojstvo antikomutativnosti vektorskog množenja

Koristeći se svojstvima vektorskog množenja vektora te pojmom determinante, za analitički zapisane vektore prostora

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$
$$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$

dobijemo **formulu za vektorski umnožak**:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}.$$

Primjer 5.3. [Vektorski umnožak vektora]
Odredimo vektorski umnožak vektora $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ i $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ te površinu paralelograma što ga oni razapinju:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 18\vec{j} - 5\vec{k}$$
$$P = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{(-17)^2 + 18^2 + (-5)^2} = \sqrt{638}.$$

□

5.3.3 Mješoviti umnožak vektora

Mješoviti umnožak *triju* vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ definiramo kao broj

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Iz formula za računanje skalarnog i vektorskog umnoška vektora, za prostorne vektore

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \\ \vec{b} &= b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k} \\ \vec{c} &= c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k} \end{aligned}$$

dobivamo sljedeću **formulu za mješoviti umnožak**:

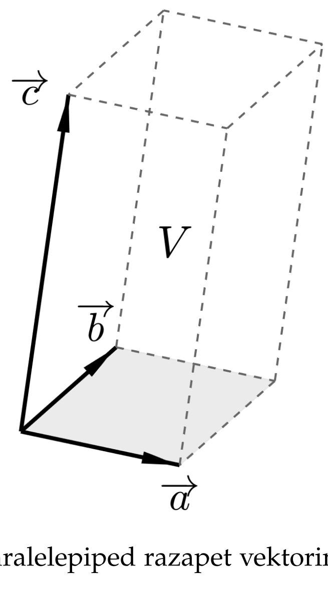
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Primjer 5.4. [Mješoviti umnožak vektora]
Odredimo mješoviti umnožak vektora $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ i $\vec{c} = 5\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -62.$$

□

Mješoviti umnožak vektora ima sljedeće **geometrijsko značenje**: uočimo paralelepiped razapet vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, tj. kosu prizmu kojoj je baza paralelogram razapet vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a treći joj je brid određen vektorom $\vec{c}$ (Slika 5.5).



Slika 5.6: Paralelepiped razapet vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$

Obujam V tog paralelepipeda je dan s

$$V = \left|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\right|,$$

odnosno

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \pm V,$$

gdje je predznak + ili −, ovisno o tome čine li vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ (u tom redoslijedu) desni sustav ili ne, tj. čine li oni konfiguraciju poput $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ ili ne, što možemo provjeriti pomoću pravila desne ruke. Na primjer, vektori iz Primjera 5.4 ne čine desni sustav i razapinju paralelogram obujma $V = 62$. Broj -62 koji je jednak mješovitom umnošku neki zovu orijentirani obujam.

Vrijedi sljedeće očito **svojstvo mješovitog množenja**: ako u izrazu $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ dva vektora zamijene mjesta, vrijednost izraza ostaje ista ili samo promijeni predznak. To je zato što se obujam paralelepipeda razapet tim vektorima ne mijenja - uvijek ostaje isti paralelepiped. Preciznije, vrijedi:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b},$$

kao i za preostale tri kombinacije poretka vektora:

$$(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a},$$

ali se vrijednost kod posljednje tri jednakosti, u odnosu na prve tri jednakosti, mijenja u suprotnu.

Za tri vektora kažemo da su **komplanarni** ako leže u istoj ravnini. Ako su vektori različiti od nulvektora, to je ekvivalentno tome da se jedan (bilo koji) od njih može izraziti kao linearna kombinacija preostalih dvaju. Iz geometrijske interpretacije mješovitog produkta kao orijentiranog obujma paralelepipeda dobije se **uvjet komplanarnosti triju vektora**:

> *Tri vektora su komplanarni ako i samo ako je njihov mješoviti umnožak jednak nuli.*

Naime, tri su vektora komplanarna ako i samo ako je paralelepiped koji razapinju degeneriran, tj. ako je obujam tog paralelepipeda jednaku nuli, a to će biti ako i samo ako je njihov mješoviti umnožak jednak nuli.

5.4 PRIMJENA MATLAB-A

5.4.1 Skalarni umnožak vektora i kut među vektorima. Naredba dot

Pokažimo na Primjeru 5.1 (i) kako se koristi naredba dot za računanje skalarnog umnoška:

```
a = [2 3 4]
b = [2 -3 4]
dot(a, b)                                                    % 11
```

Podsjetimo se da smo pomoću skalarnog umnoška i modula vektora mogli računati i kosinus kuta među vektorima. Pokažimo kako se, pomoću naredbe acos za arkus kosinus, dobiva kut među vektorima:

```
acos(dot(a, b) / (norm(a) * norm(b)))                    % 1.1817
```

Rezultat je izražen u radijanima. Ukoliko taj kut želimo dobiti u stupnjevima, umjesto acos koristimo acosd:

```
acosd(dot(a, b) / (norm(a) * norm(b)))                  % 67.7090
```

5.4.2 Vektorski umnožak vektora. Naredba cross

Vektorski umnožak vektora računamo naredbom cross, što pokazujemo na primjeru vektora iz Primjera 5.3. Ujedno računamo i površinu paralelograma razapetog tim vektorima:

```
a = [2 3 4]
b = [3 2 -3]
cross(a, b)                                        % [-17 18 -5]
P = norm(cross(a, b))                                 %  25.2587
```

Simbolički račun upoznali smo u prošloj lekciji, a ovdje pokazujemo da MATLAB kod naredbe cross koristi formulu za vektorski umnožak identičnu onoj iz ove lekcije:

```
syms a1 a2 a3 b1 b2 b3
a = [a1 a2 a3]
b = [b1 b2 b3]
axb = cross(a, b)
```

```
axb = [a2*b3 - a3*b2, a3*b1 - a1*b3, a1*b2 - a2*b1]
```

5.4.3 Mješoviti umnožak vektora

S obzirom na to da u MATLAB-u ne postoji naredba za mješoviti umnožak vektora, definirajmo je sami i izračunajmo mješoviti umnožak vektora iz Primjera 5.4, a ujedno i volumen paralelepipeda razapetog tim vektorima:

```
a = [2 3 4]
b = [3 2 -3]
c = [5 1 -1]
mix = @(a, b, c) dot(cross(a, b), c)
vol = @(a, b, c) abs(mix(a, b, c))
mix(a, b, c)                                                  % -62
vol(a, b, c)                                                   % 62
```

5.5 PITANJA I ZADATCI

1. (i) Neka sile $\vec{F}$ i $\vec{G}$ imaju zajedničko hvatište. Odredite intenzitet rezultantne sile u terminima intenziteta $\left|\vec{F}\right|$, $\left|\vec{G}\right|$ i kuta α među silama $\vec{F}$ i $\vec{G}$.

   (ii) Provedite postupak iz (i) ako je $\left|\vec{F}\right| = 5\text{N}$, $\left|\vec{G}\right| = 3\text{N}$ i $\alpha = 60°$.

   Uputa: koristite formulu $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ za modul vektora $\vec{v}$ u koju uvrstite $\vec{v} = \vec{F} + \vec{G}$.

2. (i) Odredite kut između vektora $\vec{u} + \vec{v}$ i $\vec{u}$ u terminima $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ i kuta α među vektorima $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

   (ii) Provedite postupak iz (i) ako je $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 3$ i $\alpha = 60°$.

   Uputa: koristite Zadatak 1. kako bi odredili $|\vec{u} + \vec{v}|$.

3. Izračunajte $\vec{a} \cdot \vec{i}$, $\vec{a} \cdot \vec{j}$ i $\vec{a} \cdot \vec{k}$. Uočite pravilo i formulirajte ga za vektore u prostoru bilo koje dimenzije.

4. Neka je $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ i $\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$. Uvrštavajući u formulu za računanje vektorskog produkta pomoću determinante pokažite da je:

   (i) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$

   (ii) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

5. Koristeći svojstva vektorskog produkta obrazložite zašto je
$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}.$$
   Obrazložite i koristeći definiciju vektorskog produkta, pomoću smjera, apsolutne vrijednosti i orijentacije.

6. Izračunajte $\vec{a} \times \vec{i}$, $\vec{a} \times \vec{j}$ i $\vec{a} \times \vec{k}$. Uočite pravilo i formulirajte ga.

7. Koristeći svojstva determinante obrazložite zašto je
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}.$$

8. Koristeći smjer vektorskog produkta obrazložite zašto je

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0.$$

Obrazložite isto koristeći svojstva determinante.

6 LINEARNI SUSTAVI I NJIHOVO RJEŠAVANJE

U lekciji se obrađuje linearni sustav, njegov matrični zapis i rješavanje pomoću inverzne matrice (ako je to moguće), Cramerovim pravilom te Gauss-Jordanovom metodom. Također se obrađuje jedan brz algoritam za određivanje determinante i inverzne matrice.

6.1 PRIPADNI PROBLEM

Mnogi se praktični i teoretski problemi svode na linearne sustave. Naime, veličine koje se razmatraju u pravilu nisu nezavisne, već su povezane određenim jednadžbama. Najjednostavnija, ali vrlo česta situacija jest ona kad su te jednadžbe linearne. Tada svaka bitno nova jednadžba smanjuje stupanj slobode za jedan. Ako veza (jednadžba) ima koliko i veličina (nepoznanica), onda se, u praksi, u pravilu dobiva jedinstveno rješenje (stupanj slobode nula), koje se, potom, interpretira kao jedinstveno rješenje problema.

6.2 POTREBNO PREDZNANJE

Potrebno je poznavati sustav dviju linearnih jednadžba s dvjema nepoznanicama, pojam rješenja i metode njihova rješavanja (gradivo iz osnovne i srednje škole) te osnovna svojstva matrica i determinanta.

6.3 NOVE DEFINICIJE I TVRDNJE S PRIMJERIMA

6.3.1 Pojam linearnog sustava

Linearni sustav od m jednadžba s n nepoznanica jest sustav oblika:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m.
\end{aligned}$$

Brojevi a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ i $b_1, b_2, \ldots, b_m$ zovu se **koeficijenti**, a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **nepoznanice**.

Na primjer, za $m = 2$ i $n = 3$ dobije se sustav od dviju jednadžba s trima nepoznanicama:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2.
\end{aligned}
$$

Konkretno:

Primjer 6.1. [Linearni sustav od dviju jednadžba s trima nepoznanicama]

$$
\begin{aligned}
2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\
3x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 7.
\end{aligned}
$$

□

Ako je $m = n$, tj. ako linearni sustav ima jednako jednadžba kao i nepoznanica, sustav zovemo **kvadratnim sustavom** n-tog reda:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n &= b_n.
\end{aligned}
$$

Na primjer:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3
\end{aligned}
$$

je zapis općeg sustava trećeg reda. Konkretno:

Primjer 6.2. [Kvadratni sustav trećeg reda]

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\
2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\
3x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 7.
\end{aligned}
$$

□

Rješenje linearnog sustava s n nepoznanica je svaka uređena n-torka $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ koja, ako se uvrsti umjesto nepoznanica $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, zadovoljava sve jednadžbe sustava.

Primjer 6.3. [Rješenje linearnog sustava]
Trojka $(2, 1, 1)$ rješenje je sustava iz Primjera 6.1 jer je

$$
\begin{aligned}
2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 &= 5 \\
3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 &= 7.
\end{aligned}
$$

I trojka $(1, -1, 0)$ je rješenje tog sustava jer je

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 &= 5 \\ 3 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 &= 7. \end{aligned}$$

Inače, gornji sustav ima beskonačno mnogo rješenja. Da je trojka $(2, 1, 1)$ rješenje sustava pišemo kao $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 1)$ ili kao $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.
Lako se vidi da je $(2, 1, 1)$ jedino (jedinstveno) rješenje sustava iz Primjera 6.2. □

Općenito, mogu nastati tri mogućnosti:

1. sustav ima jedinstveno rješenje
2. sustav ima beskonačno mnogo rješenja
3. sustav nema rješenja.

6.3.2 Matrični zapis sustava

Ako se koeficijenti uz nepoznanice postave u **matricu sustava**, tj. u matricu s m redaka i n stupaca ($m \times n$ matricu)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

a slobodni koeficijenti $b_1, b_2, \dots, b_m$ i nepoznanice $x_1, x_2, \dots, x_n$ u jednostupčane matrice

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

sustav se kratko može zapisati u matričnom obliku kao

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Gornji zapis zovemo **matrični zapis sustava**.

Primjer 6.4. [Matrični zapis sustava]
Matrični zapis sustava iz Primjera 6.2 jest

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

□

6.3.3 Regularni sustav i njegovo rješavanje

Kvadratni linearni sustav $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ zove se **regularnim** ako mu je matrica sustava A regularna, tj. ako ima inverznu matricu A^{-1}, što vrijedi ako je zadovoljen uvjet $\det A \neq 0$. Takav sustav ima jedinstveno rješenje koje se može dobiti na više načina:

(i) **Metoda invertiranja matrice sustava**: rješenje regularnog sustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je dano s

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Uočimo analogiju s linearnom jednadžbom $ax = b$ i njenim rješenjem $x = a^{-1}b$, tj. $x = \frac{b}{a}$, samo što je kod nje uvjet $a \neq 0$ (da bismo mogli dijeliti s a), a u linearnom sustavu $\det A \neq 0$ (da bi postojala inverzna matrica matrice A).

Primjer 6.5. [Metoda invertiranja matrice sustava]
U Primjeru 6.4, matrica sustava je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Dobije se $\det A = 4$ i, korištenjem poznate formule $A^{-1} = \frac{1}{\det A}A^*$,

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -9 & 7 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix}.$$

Sustav je regularan i rješenje mu je, prema formuli $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -9 & 7 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tj. $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$, kako smo i prije dobili. □

(ii) **Cramerovo pravilo**: to je samo raspisana varijanta metode pomoću inverzne matrice. Kako se to pravilo, iako vrijedi općenito, koristi ponajviše za rješavanje sustava drugog i trećeg reda (jer je za sustave većeg reda zamorno), objasnit ćemo ga na konkretnom, već viđenom primjeru sustava trećeg reda.

Primjer 6.6. [Cramerovo pravilo]
Riješimo Cramerovim pravilom sustav iz Primjera 6.4. U Primjeru 6.5 vidjeli smo da je determinanta sustava $D = 4$. Treba još izračunati determinante D_1, D_2 i D_3 tako da u determinanti

sustava redom zamjenjujemo prvi, drugi, odnosno treći stupac sa stupcem slobodnih koeficijenata:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 4 \\ 7 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 8$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 4.$$

Sad je, prema Cramerovu pravilu:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{8}{4} = 2$$
$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{4}{4} = 1$$
$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{4}{4} = 1,$$

kako smo i prije dobili. □

(iii) **Gauss-Jordanova metoda**: to je u biti metoda suprotnih koeficijenata (koja se obrađuje već u osnovnoj školi), samo što se ne pišu jednadžbe već se vrše tzv. **elementarne operacije - transformacije** na koeficijentima sustava, točnije, na retcima tzv. proširene matrice sustava $\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \end{array}\right]$:

1. zamjena redaka
2. množenje retka brojem različitim od nule
3. dodavanje retka drugom retku.

Napomenimo da je ova metoda pogodna za rješavanje *svih* linearnih sustava, a ne samo kvadratnih ili regularnih. Pored toga, ova metoda je posebno pogodna za rješavanje velikih sustava jer je algoritamski neusporedivo brža od obje prethodno opisane metode.
Metodu ćemo objasniti na već rješavanom primjeru.

Primjer 6.7. [Gauss-Jordanova metoda - regularan sustav]
Gauss-Jordanovom metodom riješimo sustav iz Primjera 6.4. Krećemo od proširene matrice sustava dobivene tako da matrici sustava dodamo stupac slobodnih koeficijenata:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \\ 3 & -4 & 5 & 7 \end{array}\right] \overset{1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 5 & 7 \end{array}\right]$$

$$\overset{2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & -7 & 2 & -5 \end{array}\right] \overset{3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -5 \end{array}\right]$$

$$\overset{4}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 2 & -5 \end{array}\right] \overset{5}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\overset{6}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

gdje smo izvršili sljedeće elementarne operacije:

$\overset{1}{\sim}$ prvi redak pomnožili smo s -2 i dodali drugom

$\overset{2}{\sim}$ prvi redak pomnožili smo s -3 i dodali trećem

$\overset{3}{\sim}$ od drugog retka oduzeli smo treći

$\overset{4}{\sim}$ drugi redak podijelili smo s 2

$\overset{5}{\sim}$ drugi redak pomnožili smo sa 7 i dodali trećem

$\overset{6}{\sim}$ treći redak podijelili smo s 2.

Do ovog mjesta postupak se obično zove Gaussova metoda - prepoznajemo je po tome što smo u prvom dijelu matrice došli do gornje trokutaste matrice s jedinicama na dijagonali. Njome smo početni sustav sveli na

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 &= 1 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 &= 1, \end{aligned}$$

tj. $x_2 = x_3 = 1$ i $x_1 + x_2 + x_3 = 4$, odakle dobijemo $x_1 = 2$, kako smo i prije imali.

Mi ćemo nastaviti rješavati sustav matrično i to tako da sad idemo od najdonjeg retka prema gore - to je Jordanova metoda koja, skupa s Gaussovom, čini Gauss-Jordanovu metodu. Pokažimo Jordanovu metodu (nastavljamo tamo gdje smo stali u Gaussovoj metodi):

$$\overset{7}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{8}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

gdje smo izvršili sljedeće elementarne operacije:

$\overset{7}{\sim}$ od prvog retka oduzeli smo treći

$\overset{8}{\sim}$ od prvog retka oduzeli smo drugi.

Sad iz posljednje matrice izravno čitamo: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. □

6.3.4 Rješavanje neregularnih sustava

Kao što smo već rekli, Gauss-Jordanova metoda pogodna je (za razliku od druge dvije opisane metode) za rješavanje *svih*, a ne samo regularnih sustava. Dakle, možemo je koristiti i za rješavanje sustava koji imaju beskonačno mnogo rješenja te za rješavanje sustava koji nemaju rješenja.

Primjer 6.8. [Gauss-Jordanova metoda - neregularan sustav] Gauss-Jordanovom metodom riješimo sustav

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Da bismo na početku imali 1 (što je pogodno), treću jednadžbu stavimo na prvo mjesto. Vidimo da smo dobili sustav koji se samo za jedan predznak razlikuje od onog kojeg smo rješavali u prethodnim primjerima. Vidjet ćemo da ovaj sustav ima beskonačno mnogo rješenja. Postupak ćemo ubrzati tako što ćemo, kad to bude zgodno, obaviti više elementarnih operacija:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 3 & -4 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \overset{1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 & 7 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \end{array}\right]$$
$$\overset{2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right],$$

gdje smo izvršili sljedeće elementarne operacije:

$\overset{1}{\sim}$ zamijenili smo prvi i treći redak

$\overset{2}{\sim}$ od drugog retka oduzeli smo trostruki prvi, a od trećeg dvostruki prvi.

Dobili smo isti drugi i treći redak, tako da treći možemo odbaciti. Do istog zaključka došli bismo da smo od trećeg retka oduzeli drugi jer bi tada treći redak sadržavao same nule. Dakle, od sad imamo samo dva retka te nastavljamo s elementarnim operacijama:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \overset{3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$
$$\overset{4}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right],$$

gdje smo izvršili sljedeće elementarne operacije:

$\overset{3}{\sim}$ drugi redak pomnožili smo s -1

$\overset{4}{\sim}$ drugi redak dodali smo prvom.

Došli smo do jedinične 2×2 matrice na lijevom dijelu proširene matrice sustava čiji treći stupac ne možemo dalje sređivati jer smo uklanjanjem trećeg retka izgubili jedinični element na glavnoj dijagonali. Stoga ovdje stajemo i očitavamo skup rješenja u ovisnosti o x_3:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + x_3 \\ x_2 &= -1 + 2x_3. \end{aligned}$$

Nepoznanicu x_3 možemo birati po volji. Na primjer:

(i) za $x_3 = 0$ dobijemo $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

(ii) za $x_3 = 1$ dobijemo $x_1 = 2$, $x_2 = 1$

(iii) za $x_3 = \frac{1}{2}$ dobijemo $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 0$, itd.

Uočimo da smo tako riješili i sustav iz Primjera 6.1. U ovom slučaju (kad jednu nepoznanicu biramo po volji) kažemo da je skup rješenja jednodimenzionalan. □

6.3.5 Algoritam za računanje determinante

Pomoću elementarnih operacija na retcima može se izračunati determinanta. Ta je metoda, općenito, neusporedivo brža od one s razvojem po stupcu ili retku.
Od postupka u Gauss-Jordanovoj metodi razlikuje se po tome što se pri dijeljenju nekog retka brojem, taj broj treba izlučiti i što se pri zamjeni mjesta dvaju redaka, mijenja predznak.

Primjer 6.9. [Računanje determinante pomoću elementarnih operacija]
Izračunajmo determinantu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Već smo u Primjeru 6.5 vidjeli da je $\det A = 4$. Sad ćemo taj rezultat dobiti ovom metodom, uz oznake za elementarne operacije na retcima kao u Primjeru 6.7:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & -7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{4}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{5}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{6}{=} 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

□

Primjer 6.10. [Računanje determinante pomoću elementarnih operacija]
Izračunajmo determinantu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinantu rješavamo koristeći iste prve dvije elementarne operacije kao u Primjeru 6.8, samo što kod prve operacije, zbog zamjene redaka determinanta mijenja predznak, a operacija ovdje označena s 3 od trećeg retka oduzima drugi:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{1}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

□

Vidimo da posljednji redak sadržava samo nule pa se razvojem po tom retku lako možemo uvjeriti da je $\det A = 0$. Ovo ujedno ukazuje na činjenicu da sustav iz Primjera 6.8 nije regularan (tamo smo vidjeli da je to sustav koji ima beskonačno mnogo rješenja).

6.3.6 Metoda za određivanje inverzne matrice

Pomoću elementarnih operacija na retcima može se odrediti inverz matrice. Ta je metoda, općenito, neusporedivo brža od one s adjungiranom matricom. Od postupka u Gauss-Jordanovoj metodi razlikuje se po tome što nema zamjene redaka.

Opis metode: do matrice A dodamo jediničnu matricu I i vršimo elementarne operacije na retcima dok se jedinična matrica ne pojavi na lijevoj strani. Tada je inverz A^{-1} na desnoj:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array}\right].$$

Primjer 6.11. [Određivanje inverza pomoću elementarnih operacija] Odredimo inverz matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Inverz smo već računali u Primjeru 6.5. Sad ćemo to obaviti ovom metodom, uz oznake za elementarne operacije na retcima kao u Primjeru 6.7, s time da ćemo ovdje postupak ponegdje ubrzati tako što ćemo, tamo gdje je moguće, u jednom koraku obaviti više operacija:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{1,2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\overset{3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{4}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\overset{5}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}\right] \overset{6}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \end{array}\right]$$
$$\overset{7,8}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \end{array}\right].$$

Sad stajemo jer smo na lijevoj strani dobili jediničnu matricu. Inverznu matricu očitavamo na desnoj strani. Vidimo da je, kao i u Primjeru 6.5,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{7}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -9 & 7 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix}.$$

□

Primjer 6.12. [Određivanje inverza pomoću elementarnih operacija] Odredimo inverz matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Primijetimo da se zadana matrica razlikuje od one iz prethodnog primjera samo u drugom elementu zadnjeg retka. Stoga koristimo iste prve dvije elementarne operacije na retcima kao u Primjeru 6.11, dok operacija ovdje označena s 3 od drugog retka oduzima treći:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{1,2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & | & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\overset{3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & | & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada smo u drugom retku dobili same nule, što znači da nećemo moći postići da taj redak izgleda kao drugi redak jedinične matrice. Stoga ovaj postupak ne možemo nastaviti dalje, što ukazuje na to da matrica A nema inverznu matricu. □

6.4 PRIMJENA MATLAB-A

6.4.1 Zadavanje i rješavanje linearnog sustava. Naredba `solve`

Pokažimo na sustavu iz Primjera 6.2 kako se zadaje linearni sustav i kako se rješava korištenjem naredbe `solve`:

```
syms x1 x2 x3
jed1 = x1 + x2 + x3 == 4
jed2 = 2*x1 - 3*x2 + 4*x3 == 5
jed3 = 3*x1 - 4*x2 + 5*x3 == 7
rjesenje = solve([jed1, jed2, jed3], [x1, x2, x3])
```

```
rjesenje =
  struct with fields:
    x1: [1×1 sym]
    x2: [1×1 sym]
    x3: [1×1 sym]
```

Ovdje za rješenje dobivamo *strukturu*, tip podatka u MATLAB-u u kojem su slični podaci grupirani zajedno u *polja* kojima pristupamo s `imeStrukture.imePolja`. Konkretno, do rješenja zadanog linearnog sustava dolazimo ovako:

```
[rjesenje.x1; rjesenje.x2; rjesenje.x3]          % [2; 1; 1]
```

6.4.2 Matrični zapis i matrično rješavanje sustava. Naredbe `equationsToMatrix` i `linsolve`

Matrični zapis sustava dobivamo pomoću `equationsToMatrix`. Pokažimo to na Primjeru 6.4, tj. na istom sustavu kao u 6.4.1:

```
[A,B] = equationsToMatrix([jed1, jed2, jed3], [x1, x2, x3])
```

```
A =
    [1,  1, 1]
    [2, -3, 4]
    [3, -4, 5]

B =
    4
    5
    7
```

Tako zapisani sustav sada rješavamo naredbom `linsolve`:

```
X = linsolve(A,B)                                % [2; 1; 1]
```

Sustav smo mogli zadati i tako da najprije zadamo `A` i `B`, a potom ga riješimo pomoću `linsolve`.

6.4.3 Rješavanje regularnog sustava

Sustav iz 6.4.1 odnosno 6.4.2 je regularan, u što se možemo dodatno uvjeriti provjerom da je determinanta matrice sustava različita od nule. Stoga ga možemo riješiti i metodom invertiranja matrice sustava:

```
det(A)                                                 % 4
inv(A) * B                                       % [2; 1; 1]
```

6.4.4 Rješavanje neregularnog sustava

Neregularni sustavi ne mogu se zadovoljavajuće riješiti pomoću `solve`, `linsolve` ili `inv`. Na primjer, za sustav iz Primjera 6.8 za rezultat naredbe `linsolve(A, B)` dobili bismo upozorenje da nešto nije u redu, ali i jedno od beskonačno mnogo rješenja:

```
A = [2 -3 4; 3 -4 5; 1 -1 1]
B = [5; 7; 2]
X = linsolve(A, B)
```

```
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.
Results may be inaccurate. RCOND =  2.775558e-18.

X =
   -0.5000
   -4.0000
   -1.5000
```

Naredba `inv` dala bi isto upozorenje i ponudila jedno rješenje za kojega se može provjeriti da je netočno:

```
X = inv(A) * B
```

```
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.
Results may be inaccurate. RCOND =  2.775558e-18.

X =
    -6
     0
    -4
```

6.5 PITANJA I ZADATCI

1. Zapišite matrično sustav

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 3 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 6. \end{aligned}$$

   Je li sustav regularan? Uputa: izračunajte determinantu matrice sustava.

2. (i) Kojim se obrađivanim metodama može rješavati sustav

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 3x_1 - x_2 + 7x_3 &= 9? \end{aligned}$$

   Uputa: izračunajte determinantu matrice sustava.

   (ii) Koliko sustav ima rješenja? Uputa: treća jednadžba dobije se zbrajanjem prve i druge, pa se može izostaviti.

3. Koliko rješenja ima sustav

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 8 \\ -3x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= -12? \end{aligned}$$

   Uputa: druga se jednadžba dobije iz prve množenjem s 2, a treća množenjem s -3, pa se mogu izostaviti.

4. Koliko rješenja ima sustav

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 3x_1 - x_2 + 7x_3 &= 6? \end{aligned}$$

5. (i) Zapišite matrično sustav

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f. \end{aligned}$$

(ii) Riješite sustav iz (i) koristeći inverznu matricu i pomoću Cramerove metode (uz pretpostavku da je sustav regularan). Usporedite rezultate.

6. Koliko množenja treba izvršiti kod računanja determinante drugog reda, a koliko kod računanja determinante trećeg reda pomoću elementarnih operacija? Pokušajte razmišljanje nastaviti za determinante četvrtog i višeg reda. Usporedite s brojem množenja kod metode razvoja po nekom stupcu ili retku.

7. Odredite inverz matrice:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Uputa: u prvom koraku oduzmite treći redak od prvoga tako da bi započinjao s 1 (a ne s nulom).

8. Koristeći elementarne operacije odredite inverz dijagonalne matrice. Komentirajte.

7 SVOJSTVENE VRIJEDNOSTI I SVOJSTVENI VEKTORI

U lekciji se obrađuju pojam te geometrijsko i fizikalno značenje svojstvene vrijednosti i svojstvenog vektora na primjerima matrica drugog reda.

7.1 PRIPADNI PROBLEM

Mrlja u obliku kruga, sastavljena od čestica jednoliko raspoređenih oko središta, radijalno se širi. Jedna od najjednostavnijih mogućnosti jest da to širenje, geometrijski, bude dilatacija ili kontrakcija u svim smjerovima. Takve se pojave opisuju skalarnim matricama (koje djeluju praktično kao brojevi).
Nešto složenija je situacija kad imamo takvo rastezanje koje je radijalno samo uzduž koordinatnih osi (ali, možda, po svakoj osi s drugim intenzitetom). Ono se opisuje dijagonalnim matricama.
Takvo djelovanje u ravnini, koje je radijalno po dvama okomitim pravcima kroz ishodište, opisuje se simetričnim matricama. Slično vrijedi za prostor i za više dimenzije. To jedan od glavnih razloga važnosti simetričnih matrica i njihove uloge u primjenama - one su vrlo bliske brojevima, odnosno dijagonalnim matricama.

7.2 POTREBNO PREDZNANJE

Ovo je potpuno novo gradivo. Za usvajanje je potrebno razumjeti pojam vektora, matrice i djelovanja transformacija, tj. matrica transformacija na točke ravnine ili prostora.

Primjer 7.1. [Posebni smjerovi djelovanja nekih transformacija]
U ovom ćemo primjeru, uz ostalo, razmatrati u što se transformiraju, pri djelovanju transformacije ravnine, kvadrat s vrhovima u $(\pm 1, \pm 1)$ i jedinična kružnica sa središtem u ishodištu, odnosno pripadni krug.

(i) Uočite da **simetrija ravnine s obzirom na x-os**, od svih pravaca koji prolaze ishodištem, tj. smjerova, ima dva istaknuta:

> x-os, čiju svaku točku ostavlja na miru. Za svaki takav pravac kažemo da je **fiksni pravac**.
>
> y-os, koju ostavlja na miru, ali ne i njene točke već ih zrcali s obzirom na ishodište.

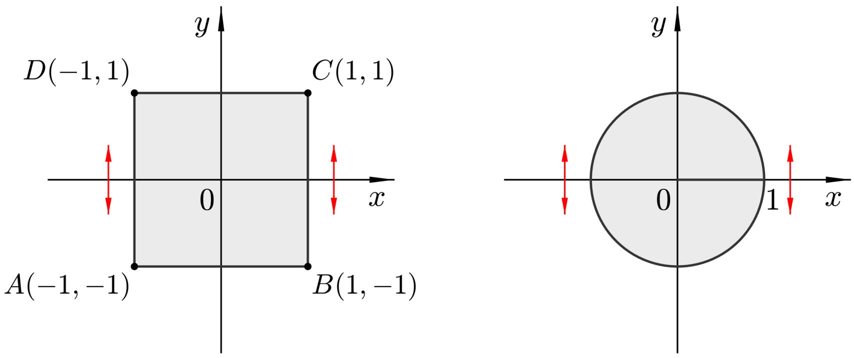
To se očituje i u matričnom zapisu simetrije:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

gdje se broj 1 odnosi na x-os, a broj -1 na y-os. To se vidi i iz djelovanja na jedinične vektore:

$$A(\vec{i}) = \vec{i}, \ A(\vec{j}) = -\vec{j}.$$

Uočimo, također, da pri simetriji s obzirom na x-os, navedeni kvadrat i krug prelaze u sebe, samo se dio iznad x-osi zamjenjuje s onim ispod (Slika 7.1).



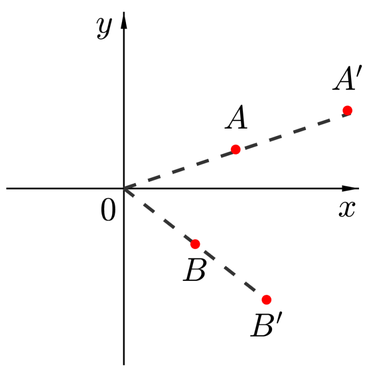
Slika 7.1: Primjer 7.1 (i)

(ii) **Rotacija ravnine oko ishodišta za kut** nema istaknutih smjerova, osim ako je to rotacija za $0°$ ili $180°$ kad su svi smjerovi istaknuti. Navedeni kvadrat i krug prelaze u neki drugi sukladni kvadrat ili krug (samo se zavrte). Ishodište je jedina točka koja ostaje na miru pa ga zovemo **fiksna točka**.

(iii) Skalarna matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

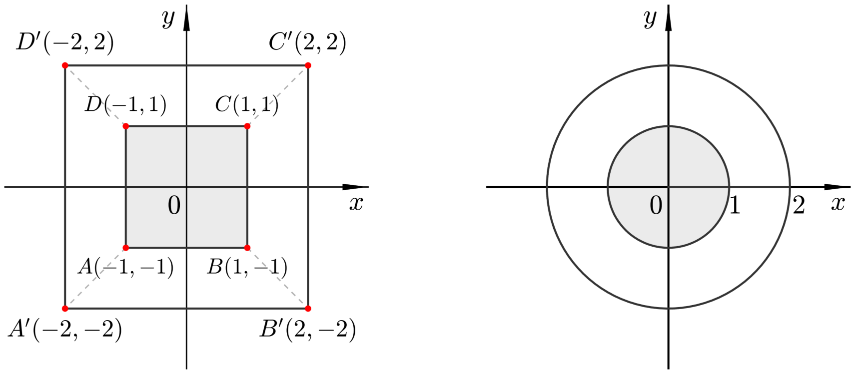
određuje **homotetiju s obzirom na ishodište** s koeficijentom 2 (dilataciju).



Slika 7.2: Primjer 7.1 (iii)

Njoj su svi smjerovi kroz ishodište istaknuti, tj. svaka se točka preslikava u točku na istoj zraci kroz ishodište, ali na dva puta većoj udaljenosti (Slika 7.2).

Pripadni kvadrat prelazi u kvadrat s vrhovima $(\pm 2, \pm 2)$, a krug u krug sa središtem u ishodištu polumjera 2 (Slika 7.3).

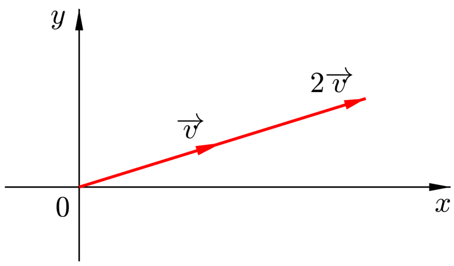


Slika 7.3: Primjer 7.1 (iii)

I tu je ishodište jedina točka koja ostaje na miru.
Fizikalno, možemo zamišljati da je u jediničnom krugu oko ishodišta bila nakupina čestica, koja se radijalno širila neko vrijeme, a novi krug predočuje novo stanje. To što su ovdje svi smjerovi istaknuti, odnosno da po svim pravcima kroz ishodište transformacija djeluje kao dilatacija s koeficijentom 2, možemo zapisati kao

$$A(\vec{v}) = 2\vec{v}$$

za sve vektore $\vec{v}$ (Slika 7.4).



Slika 7.4: Primjer 7.1 (iii)

(iv) Dijagonalna matrica

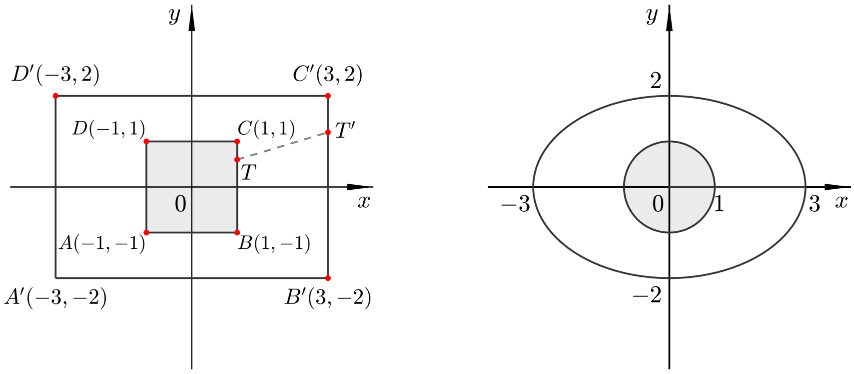
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

određuje **složeno rastezanje**. Ima dva istaknuta smjera, tj. dva pravca kroz ishodište koji prelaze u sebe:

x-os koja odgovara broju 3 i na kojemu transformacija djeluje kao dilatacija s koeficijentom 3

y-os koja odgovara broju 2 i na kojemu transformacija djeluje kao dilatacija s koeficijentom 2.

I tu je ishodište jedina točka koja ostaje na miru.
Pripadni kvadrat prelazi u pravokutnik s vrhovima $(\pm 3, \pm 2)$, a jedinična kružnica u elipsu sa središtem u ishodištu s poluosima 3, odnosno 2 (Slika 7.5).



Slika 7.5: Primjer 7.1 (iv)

Na jeziku jednadžba imamo

$$x^2 + y^2 = 1 \ \rightarrow \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Fizikalno, možemo zamišljati da je u jediničnom krugu oko ishodišta bila nakupina čestica, koja se širila neko vrijeme, ali radijalno samo po koordinatnim osima i to različitim brzinama; zato čestice izvan koordinatnih osi imaju otklon prema x-osi. Također, čestice ostaju unutar kvadranata u kojima su bili na početku.
Mehanički, možemo zamišljati da smo krug rastezali s obje strane x-osi s koeficijentom 3 i s obje strane y-osi s koeficijentom 2, a pri tom se krug deformirao u elipsu.
Dilatacije po x-osi, odnosno y-osi u ovom primjeru možemo zadati i uvjetima:

$$A(\vec{i}) = 3\vec{i}, \ A(\vec{j}) = 2\vec{j}.$$

$\square$

7.3 NOVE DEFINICIJE I TVRDNJE S PRIMJERIMA

7.3.1 Svojstvena vrijednost i svojstveni vektor matrice

U Primjeru 7.1 vidjeli smo da za dijagonalne matrice drugog reda postoje dva istaknuta smjera i da svaki odgovara po jednom broju koji je na dijagonali te matrice. Posebno, za skalarne matrice svi su smjerovi istaknuti. Postavlja se pitanje postoje li takvi smjerovi i za neke matrice koje nisu dijagonalne. Vidjet ćemo da takvi, međusobno okomiti smjerovi, postoje za *simetrične* matrice (vidjeli smo da za matrice koje odgovaraju rotacijama u ravnini takvi smjerovi ne postoje).

Kažemo da je broj λ **svojstvena vrijednost** matrice A ako postoji vektor različit od nulvektora $\vec{v}$ tako da bude

$$A(\vec{v}) = \lambda \vec{v},$$

a svaki takav vektor $\vec{v}$ zove se **svojstveni vektor** matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ.

Primjer 7.2. [Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori]
Za matrice iz Primjera 7.1 imamo:

(i) simetrija s obzirom na x-os ima dvije svojstvene vrijednosti:
  - broj 1, a svaki vektor različit od nulvektora proporcionalan $\vec{i}$ pripadni je svojstveni vektor. Zato je dovoljno reći da je $\vec{i}$ svojstveni vektor.
  - broj -1 sa svojstvenim vektorom $\vec{j}$

(ii) rotacije, osim dviju istaknutih (za $\alpha = 0°$ i $\alpha = 180°$), nemaju svojstvenih vrijednosti ni vektora, točnije, nemaju *realnih* svojstvenih vrijednosti ni vektora

(iii) homotetija s koeficijentom 2 ima jednu svojstvenu vrijednost: broj 2, a svaki vektor različit od nulvektora joj je svojstveni vektor

(iv) dijagonalna matrica
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$
ima dvije svojstvene vrijednosti:
  - broj 3 sa svojstvenim vektorom $\vec{i}$
  - broj 2 sa svojstvenim vektorom $\vec{j}$.

□

Primjer 7.3. [Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori]

(i) Pokažimo da su brojevi 1 i 6 svojstvene vrijednosti matrice
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

(ii) Odredimo pripadne svojstvene vektore.

(iii) Odredimo slike kvadrata, odnosno jediničnog kruga pri ovoj transformaciji.

(i-ii) Označimo

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Tada uvjet $A(\vec{v}) = 1 \cdot \vec{v}$ postaje linearni sustav

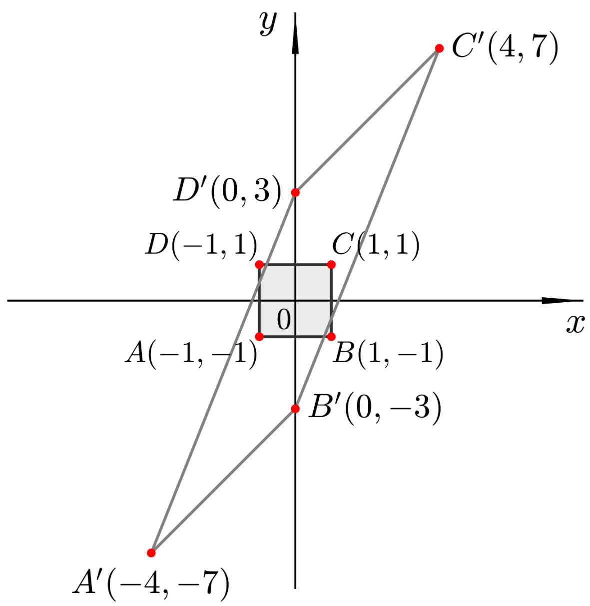
$$\begin{aligned} 2x + 2y &= x \\ 2x + 5y &= y \end{aligned}$$

koji se svodi na jednu jednadžbu $x = -2y$. Netrivijalno rješenje (različito od nulvektora) je, na primjer, $x = -2$ i $y = 1$, tj. $\vec{v_1} = -2\vec{i} + \vec{j}$ je svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednost 1 (ostali su mu proporcionalni).
Uvjet $A(\vec{v}) = 6 \cdot \vec{v}$ postaje linearni sustav

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 6x \\ 2x + 5y &= 6y, \end{aligned}$$

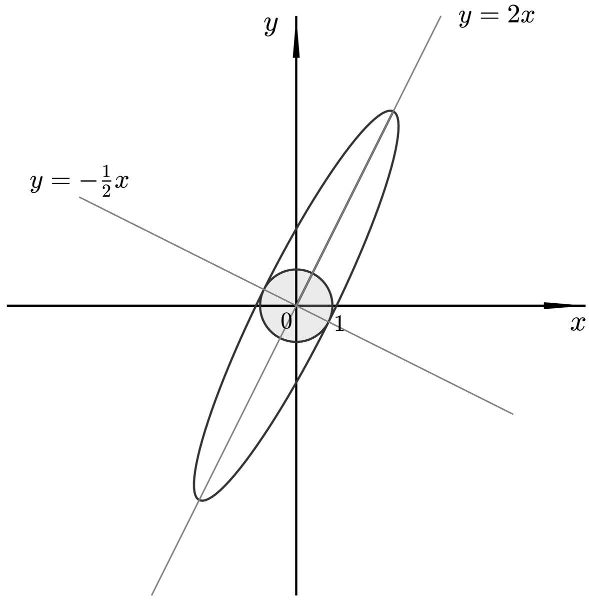
tj. $y = 2x$. Netrivijalno rješenje je, na primjer, $x = 1$ i $y = 2$, tj. $\vec{v_2} = \vec{i} + 2\vec{j}$ je svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti 6 (ostali su mu proporcionalni).
Uočimo da su vektori $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$ okomiti, a takvi su ujedno i pripadni istaknuti smjerovi zadani jednadžbama $x = -2y$, odnosno $y = 2x$.

(iii) Kvadrat s vrhovima $(\pm 1, \pm 1)$ prelazi u paralelogram s vrhovima $(4, 7)$, $(0, 3)$, $(-4, -7)$ i $(0, -3)$, Slika 7.6.



Slika 7.6: Primjer 7.3 (iii) - slika kvadrata

Jedinična kružnica prelazi u *elipsu* sa središtem u ishodištu i poluosima duljine 1 (na istaknutom pravcu s jednadžbom $x = -2y$), odnosno 6 (na istaknutom pravcu s jednadžbom $y = 2x$), Slika 7.7. Geometrijski, ta je elipsa nastala rastezanjem s koeficijentom 6 uzduž pravca s jednadžbom $y = 2x$.



Slika 7.7: Primjer 7.3 (iii) - slika jediničnog kruga

Također, možemo zamišljati da se nakupina čestica u jediničnom krugu širi tako da čestice na pravcu s jednadžbom $x = -2y$ (tj. na pravcu s jednadžbom $y = -\frac{1}{2}x$) ostaju na miru, čestice na pravcu $y = 2x$ šire se radijalno, a ostale da imaju otklon prema pravcu $y = 2x$. Pritom čestice ne izlaze iz kvadranata određenih istaknutim smjerovima. $\square$

Primjer 7.4. [Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori]

(i) Pokažimo da su brojevi 2 i 1 svojstvene vrijednosti matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Odredimo pripadne svojstvene vektore.

(iii) Odredimo slike kvadrata, odnosno jediničnog kruga pri ovoj transformaciji.

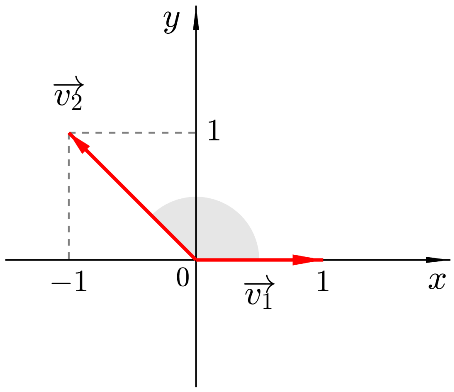
(i-ii) Uz oznake kao u Primjeru 7.2, uvjet $A(\vec{v}) = 2 \cdot \vec{v}$ postaje linearni sustav

$$\begin{aligned} 2x + y &= 2x \\ y &= 2y, \end{aligned}$$

tj. $y = 0$ pa je x-os istaknut smjer za svojstvenu vrijednost 2, tj. $\vec{v_1} = \vec{i}$ je svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednost 2. Uvjet $A(\vec{v}) = 1 \cdot \vec{v}$ postaje linearni sustav

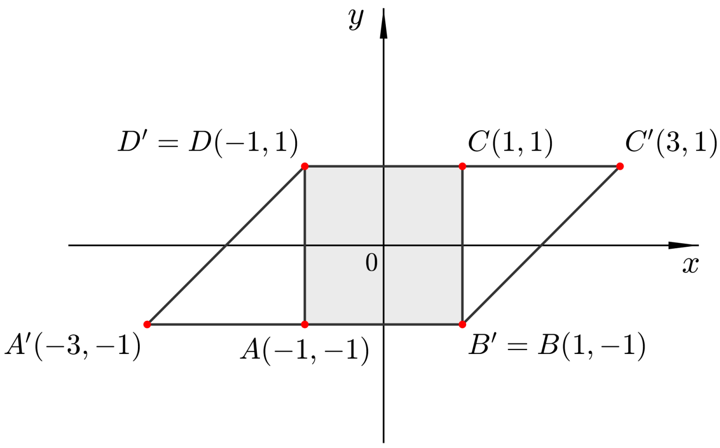
$$\begin{aligned} 2x + y &= x \\ y &= y, \end{aligned}$$

tj. $y = -x$. Netrivijalno rješenje je, na primjer, $x = -1$ i $y = 1$, tj. $\vec{v_2} = -\vec{i} + \vec{j}$ je svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti 1.
Uočimo da vektori $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$ *nisu okomiti*, a ujedno ni pripadni istaknuti smjerovi (zadani jednadžbama $y = 0$, odnosno $y = -x$), Slika 7.8.



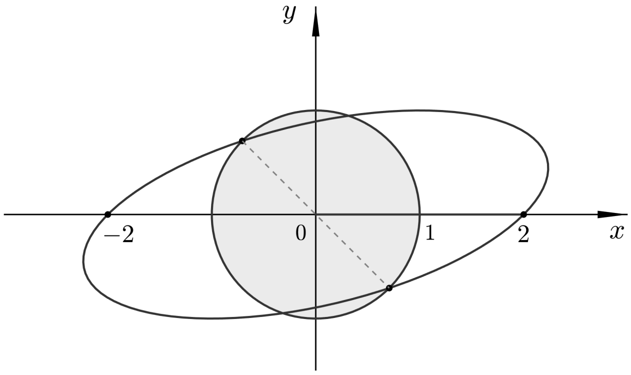
Slika 7.8: Primjer 7.4 (ii)

(iii) Kvadrat s vrhovima $(\pm 1, \pm 1)$ prelazi u *paralelogram* s vrhovima $(3, 1)$, $(-1, 1)$, $(-3, -1)$ i $(1, -1)$, Slika 7.9.



Slika 7.9: Primjer 7.4 (iii) - slika kvadrata

Jedinična kružnica prelazi u *elipsu* sa središtem u ishodištu i poluosima koji *nisu* na istaknutim smjerovima i treba ih posebno određivati (Slika 7.10).



Slika 7.10: Primjer 7.4 (iii) - slika jediničnog kruga

Možemo zamišljati da se nakupina čestica širi tako da čestice na pravcu $y = -x$ ostaju na miru, čestice na x-osi šire se radijalno, a ostale da imaju otklon prema x-osi (gdje je veća svojstvena vrijednost). Pritom čestice ne izlaze iz kosih kvadranata određenih istaknutim smjerovima. □

7.3.2 Metoda određivanja svojstvenih vrijednosti

Iz prethodnih smo primjera vidjeli kako se određuju svojstveni vektori, ako su poznate svojstvene vrijednosti. Sad ćemo na primjeru matrica drugog reda pokazati kako se određuju svojstvene vrijednosti, a ista će metoda biti primjenjiva i na bilo koje matrice.
Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

bilo koja matrica drugog reda. Uvjet $A(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ svodi se na sustav $ax + by = \lambda x$, $cx + dy = \lambda y$, tj. na

$$\begin{aligned} (a-\lambda)x + by &= 0 \\ cx + (d-\lambda)y &= 0. \end{aligned}$$

Ako želimo da taj sustav, osim očitog rješenja $(0, 0)$, ima i neko netrivijalno (jer mora biti $\vec{v} \neq \vec{0}$), determinanta sustava mora biti jednaka nuli (inače bi rješenje bilo jedinstveno: $x = y = 0$). Dakle, treba biti

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

tj.

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

To je kvadratna jednadžba pa može imati dva realna, dvostruko realno ili kompleksno-konjugirana rješenja.

Primjer 7.5. [Metoda određivanja svojstvenih vrijednosti]
Odredimo formulom svojstvene vrijednosti:

(i) dijagonalne matrice $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$

(ii) matrice iz Primjera 7.3.

(iii) matrice iz Primjera 7.4.

(iv) matrice rotacije $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

(i) Već smo na primjerima vidjeli da su brojevi a i d na dijagonali dijagonalne matrice drugog reda, svojstvene vrijednosti te matrice. Isto se dobije formulom: $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$, zbog $b = c = 0$, postaje

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad = 0,$$

s rješenjima $\lambda_1 = a$ i $\lambda_2 = d$.

(ii) Tu je

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

pa je $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 6$, kako smo već provjerili.

(iii) Tu je

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

pa je $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = 1$, kako smo već provjerili. Uočimo da su ta dva broja na dijagonali matrice (slično vrijedi za svaku gornju trokutastu ili donju trokutastu matricu).

(iv) Geometrijskim smo argumentima zaključili da ta matrica, osim dvaju izuzetaka, nema istaknutih smjerova, a to znači da joj svojstvene vrijednosti nisu realni brojevi. Isto se dobije formulom:

$$\lambda^2 - 2\cos\alpha \cdot \lambda + (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = 0$$
$$\lambda^2 - 2\cos\alpha \cdot \lambda + 1 = 0.$$

Diskriminanta te jednadžbe je $D = 4\cos^2\alpha - 4$, što je manje od nule osim ako je $\cos\alpha = \pm 1$, a to je za $\alpha = 0°$ ili $\alpha = 180°$. □

Primjer 7.6. [Svojstvene vrijednosti i vektori simetrične matrice] Pokažimo da simetrične matrice imaju realne svojstvene vrijednosti i okomite pripadne svojstvene vektore. Tu je, zbog $c = b$,

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - b^2) = 0$$

pa je diskriminanta jednaka

$$D = (a+d)^2 - 4(ad - b^2) = (a-d)^2 + b^2,$$

što je veće od nule. Stoga imamo dva različita realna rješenja, osim ako je $a = d$ i $b = 0$ (skalarna matrica kad su svi vektori svojstveni).

U slučaju različitih realnih svojstvenih vrijednosti λ_1 i λ_2, okomitost pripadnih svojstvenih vektora v_1 i v_2 pokazujemo koristeći jednakost

$$Av_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot A^T v_2,$$

gdje $\cdot$ označava skalarni umnožak vektora. Ova jednakost vrijedi i općenito, a ne samo za svojstvene vektore i nije ju teško provjeriti za matrice reda 2. Također, koristimo i činjenicu da je A simetrična matrica pa gornja jednakost postaje $Av_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot Av_2$. Računamo:

$$\lambda_1(v_1 \cdot v_2) = (\lambda_1 v_1) \cdot v_2 = Av_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot Av_2 = v_1 \cdot (\lambda_2 v_2) = \lambda_2(v_1 \cdot v_2),$$

tj.

$$(\lambda_1 - \lambda_2) v_1 \cdot v_2 = 0.$$

Kako su λ_1 i λ_2 različiti realni brojevi, tj. vrijedi $\lambda_1 \neq \lambda_2$, mora vrijediti $v_1 \cdot v_2 = 0$, što znači da su svojstveni vektori v_1 i v_2 okomiti.

□

7.4 PRIMJENA MATLAB-A

7.4.1 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori. Naredba `eig`

Svojstvene vrijednosti dobivamo pomoću naredbe `eig`, Primjer 7.3:

```
A = [2 2; 2 5]
eig(A)                                             % [1; 6]
```

Naredbom `eig` mogu se dobiti i svojstveni vektori, a ne samo svojstvene vrijednosti. U donjem primjeru stupci matrice V predstavljaju pojedine svojstvene vektore, a dijagonalna matrica L na elementima dijagonale ima svojstvene vrijednosti:

```
[V, L] = eig(A)
```

```
V =
   -0.8944    0.4472
    0.4472    0.8944
L =
     1     0
     0     6
```

Pojedine svojstvene vektore možemo dobiti tako da iz matrice V izdvojimo odgovarajući stupac, a pojedine svojstvene vrijednosti tako da izdvojimo odgovarajući dijagonalni element matrice L. Na primjer, svojstvenoj vrijednosti 1, koju detektiramo u prvom stupcu matrice L, pripada svojstveni vektor `[-0.8944; 0.4472]`, kojega detektiramo u prvom stupcu matrice V. Koristimo već poznate naredbe za dobivanje pojedinih stupaca ili elemenata matrice:

- prva svojstvena vrijednost i pripadni svojstveni vektor:

```
lambda1 = L(1, 1)                              % 1
v1 = V(:, 1)                    % [-0.8944; 0.4472]
```

- druga svojstvena vrijednost i pripadni svojstveni vektor:

```
lambda2 = L(2, 2)                              % 6
v2 = V(:, 2)                     % [0.4472; 0.8944]
```

Napomenimo da nismo dobili svojstvene vektore $\vec{v}_1 = -2\vec{i} + \vec{j}$ i $\vec{v}_2 = \vec{i} + 2\vec{j}$ kao u Primjeru 7.3 već njima proporcionalne, što nije bitna razlika.

Sada se, na primjer za vektor `v2` i svojstvenu vrijednost `lambda2`, možemo uvjeriti u jednakost $A(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ koja povezuje svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore:

```
A * v2                               % [2.6833, 5.3666]
lambda2 * v2                         % [2.6833, 5.3666]
```

Obavimo račun svojstvenih vektora i svojstvenih vrijednosti i za matricu trećeg reda:

```
B = [8 4 -1; -9 -5 1; 6 4 1]
[V, L] = eig(B)
```

```
V =
    0.4082   -0.5774    0.4082
   -0.8165    0.5774   -0.4082
    0.4082   -0.5774    0.8165
L =
   -1.0000         0         0
         0    3.0000         0
         0         0    2.0000
```

Vidimo da su svojstvene vrijednosti -1, 3 i 2, redom, s pripadnim svojstvenim vektorima u odgovarajućim stupcima matrice V. Ukoliko želimo doći do jasnije predodžbe o svojstvenim vektorima, možemo upotrijebiti naredbu `sym` za simbolički prikaz rezultata:

```
symV = sym(V)
```

```
symV =
[           6^(1/2)/6, -3^(1/2)/3,           6^(1/2)/6]
[-(2^(1/2)*3^(1/2))/3,  3^(1/2)/3,          -6^(1/2)/6]
[           6^(1/2)/6, -3^(1/2)/3, (2^(1/2)*3^(1/2))/3]
```

Primjećujemo da sve komponente svojstvenog vektora s pripadnom svojstvenom vrijednošću -1 imaju faktor $\frac{\sqrt{6}}{6}$. Stoga rezultat možemo pojednostaviti množenjem prvog stupca matrice `symV` inverzom tog faktora i korištenjem naredbe `simplify`. Slično možemo postupiti i za preostale svojstvene vektore:

```
simplify(6/sqrt(6)*symV(:, 1))                    % [1; -2; 1]
simplify(3/sqrt(3)*symV(:, 2))                   % [-1; 1; -1]
simplify(6/sqrt(6)*symV(:, 3))                    % [1; -1; 2]
```

7.4.2 Karakteristični polinom. Naredbe `charpoly`, `roots` i `poly`

Metoda nalaženja svojstvenih vrijednosti pomoću karakterističnog polinoma, u ovoj lekciji dana kao rješavanje kvadratne jednadžbe pridružene matrici drugog reda, provodi se pomoću naredbi `charpoly` za koeficijente karakterističnog polinoma te `roots` za nalaženje njegovih korijena, tj. rješenja pripadne jednadžbe. Pokažimo kako to napraviti za matricu A iz 7.4.1:

```
A = [2 2; 2 5]
p = charpoly(A)                                     % [1 -7 6]
roots(p)                                             % [6; 1]
```

Napomenimo da je rezultat naredbe `charpoly` retčani vektor koeficijenata karakterističnog polinoma, a sam karakteristični polinom dobivamo na ovaj način:

```
syms x
charpoly(A, x)                               % x^2 - 7*x + 6
```

Također, umjesto naredbe `charpoly` možemo koristiti i naredbu `poly`:

```
poly(A)                                             % [1 -7 6]
```

Ponovimo ovaj postupak za matricu trećeg reda B iz 7.4.1:

```
B = [8 4 -1; -9 -5 1; 6 4 1]
syms x
p = charpoly(B, x)                       % x^3 - 4*x^2 + x + 6
```

Ovdje je karakteristični polinom trećeg stupnja, a za matricu reda n bio bi $n-$tog stupnja.

7.5 PITANJA I ZADATCI

1. (i) Odredite svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice
$$A' = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$
   (ii) Odredite slike jedinične kružnice pri pripadnoj transformaciji ravnine. Usporedite s Primjerom 7.3 i komentirajte.

   Uputa: uočite da se matrica A' dobije zamjenom elemenata na dijagonali matrice A iz Primjera 7.3.

2. (i) Odredite svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice
$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
   (ii) Odredite slike jedinične kružnice pri pripadnoj transformaciji ravnine. Usporedite s Primjerom 7.4 i komentirajte.

   Uputa: uočite da je matrica A' transponirana matrica matrice A iz Primjera 7.4.

3. Odredite svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore nulmatrice.

4. (i) Opišite svojstvene vrijednosti matrice (različite od nulmatrice) A kojoj je determinanta jednaka nuli. Uputa: koristite se karakterističnom jednadžbom $\lambda^2 - (a+b)\lambda + (ad - bc) = 0$.
   (ii) Objasnite zašto je
$$\begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix} \text{ ili } \begin{bmatrix} -d \\ c \end{bmatrix}$$
   svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost 0. Komentirajte ulogu ovog 'ili'. Uputa: posebno razmotrite matrice kojima je jedan redak od redaka nula-redak (svi su mu elementi 0).

5. Kakva je veza među svojstvenim vrijednostima matrice i njoj transponirane matrice? Što je sa svojstvenim vektorima? Uputa: napišite pripadne karakteristične jednadžbe.

6. Usporedite kakrakteristične jednadžbe matrice i njoj inverzne matrice.

7. Objasnite da inverzna matrica ima realne svojstvene vrijednosti ako matrica ima realne svojstvene vrijednosti.

8. Obrazložite zašto je svaki vektor proporcionalan vektoru $\vec{v}$ svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost λ čim je vektor $\vec{v}$ svojstveni vektor za tu svojstvenu vrijednost.

8 POJAM FUNKCIJE, GRAFA I INVERZNE FUNKCIJE

U lekciji se obrađuju pojam funkcije i njena uloga u inženjerstvu, njena geometrijska interpretacija (graf), osnovna svojstva funkcija i pojam inverzne funkcije.

8.1 PRIPADNI PROBLEM

U proučavanju prirode i u inženjerstvu javljaju su razne veličine (vrijeme, masa, brzina, temperatura, obujam, udaljenost, položaj itd.). U tipičnoj situaciji razmatraju se dvije veličine koje nisu neovisne jedna od druge, već promjena jedne utječe na promjenu druge, dakle te su dvije veličine povezane. Problem opisivanja takvih veza je temeljni inženjerski problem, a matematički se rješava uvođenjem pojma funkcije.
Da bi se bolje uočavale spomenute veze, dobro ih je geometrijski predočiti. Matematički, to se ostvaruje grafom funkcije.

8.2 POTREBNO PREDZNANJE

Pojam funkcije i grafa funkcije obrađuje se već u osnovnoj, a sustavnije u srednjoj školi: linearna, kvadratna, eksponencijalna i logaritamska funkcija, trigonometrijske funkcije i polinomi. U ovoj lekciji važno će biti poznavanje linearne i kvadratne funkcije. Također, bit će potrebno poznavanje realnih brojeva i koordinatnog sustava na pravcu i ravnini.

8.3 NOVE DEFINICIJE I TVRDNJE S PRIMJERIMA

8.3.1 Primjeri zavisnih veličina

Primjer 8.1. [Proteklo vrijeme i položaj čestice koja se giba na pravcu]
Zamislimo da se čestica giba po pravcu. Temeljni problem *opisa* tog gibanja jest da se odredi *pravilo* koje će nam kazati koji je položaj te čestice u svakom odabranom trenutku. Da bi se taj problem matematizirao i (barem načelno) matematički riješio, treba:

1. Uvesti koordinatni sustav na pravac po kojemu se odvija gibanje: izabrati ishodište, mjernu jedinicu za duljinu i usmjerenje

(tj. odabrati točku pravca koja će imati koordinatu 0, odnosno 1). Sad položaj čestice na pravcu možemo interpretirati kao broj - koordinatu položaja; tako je položaj veličina (oznaka s) koja ima realne vrijednosti.

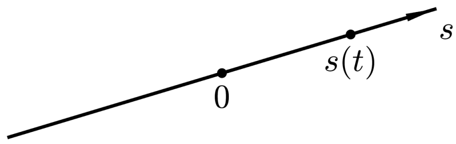
2. Dogovoriti se za nulto vrijeme i jedinicu mjerenja vremena - tako je vrijeme veličina (oznaka t) koja također ima realne vrijednosti.

Sad se problem opisa tog gibanja može prevesti na sljedeći matematički problem:

za svaku vrijednost veličine t treba odrediti vrijednost veličine s.

Da bismo naznačili da neka vrijednost veličine s odgovara nekoj vrijednosti t vremena, pišemo $s(t)$, dakle (Slika 8.1):

$$s(t) := \text{ koordinata položaja čestice u trenutku } t.$$



Slika 8.1: Primjer 8.1

Na primjer, $s(2) = 4$ znači da je za $t = 2$ čestica bila u točki s koordinatom 4.
Uočimo da je u ovom važnom primjeru, vrijeme t primarna veličina, a položaj s sekundarna. Kažemo da veličina s **zavisi** o veličini t. □

Varijante: svaku veličinu koja ovisi o vremenu prirodno možemo zamišljati kao gibanje po pravcu. Naime, zamišljamo kako se, dok vrijeme protječe, vrijednost te veličine giba po brojevnom pravcu.

Na primjer:

- masa m nekog spoja koji nastane u nekoj reakciji za neko vrijeme.
- temperatura τ koja nastane pri nekoj reakciji u nekom vremenu.
- brzina v kojom se odvija neka reakcija u nekom vremenu.

Općenito, ako imamo dvije veličine tako da druga ovisi o prvoj, ta je zavisnost analogna gibanju po pravcu. Naime, vrijednosti druge (zavisne) veličine mijenjaju se (gibaju) na brojevnom pravcu dok se mijenja prva veličina (koja u ovim okolnostima zamjenjuje vrijeme).
Pri gibanju po pravcu čestica *načelno* može biti u svakom položaju pa je, općenito, skup vrijednosti veličine s (koja registrira položaj) skup realnih brojeva. Skup vrijednosti koje *zaista postiže* ta veličina u konkretnom slučaju, u pravilu je manji.

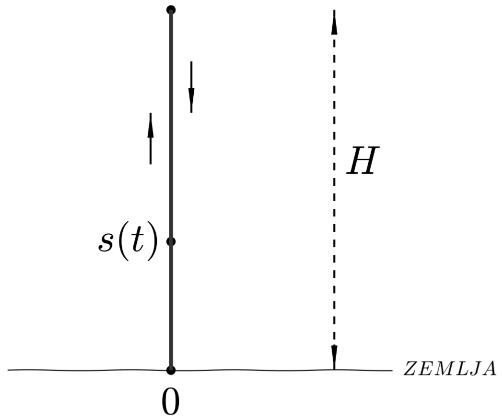
Primjer 8.2. [Vrijednosti koje postiže veličina]
Opišimo skup vrijednosti koje pri vertikalnom hicu može postići veličina:

(i) položaja s

(ii) vremena t.

(i) Ovaj problem nema jednoznačan odgovor. On ovisi o više faktora:

1. Uvođenje koordinatnog sustava na pravac po kojemu se odvija gibanje: uobičajeno je da je ishodište u razini zemlje i da je pozitivni smjer (usmjerenje) prema uvis (Slika 8.2). Ako to prihvatimo, onda je skup vrijednosti koje s može postići segment $[0, H]$, gdje je H visina do koje dođe čestica prije nego počne padati.



Slika 8.2: Primjer 8.2

2. Visina na kojoj je bila čestica kad smo je bacili u vis.
3. Brzina kojom je čestica bačena u vis.

Ima i više drugih faktora (otpor zraka, stvarna zemljina sila koja djeluje na česticu itd.), ali njih zanemarujemo, jer ovdje razmatramo gibanje u idealnim uvjetima.

(ii) Ni ovaj problem nema jednoznačno rješenje. On također ovisi o više faktora - uz faktore 2. i 3. tu je još:

4. Odabir nultog vremena (i jedinice za vrijeme). Obično se uzima da je u $t = 0$ čestica izbačena u vis. Tada t postiže segment $[0, T]$, gdje je T vrijeme u trenutku kad čestica udari u pod.
Možemo zamisliti da se gibanje i nakon pada nastavlja (samo što čestica miruje) pa t postiže vrijednosti iz $[0, \infty\rangle$.
Dalje, možemo zamisliti da je gibanje bilo i prije izbacivanja u vis (samo što je čestica mirovala). Tada t postiže svaku realnu vrijednost. □

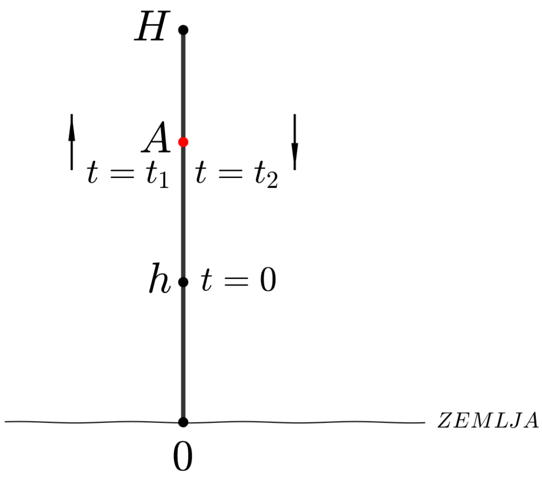
Uočimo da, pri gibanju po pravcu, svakoj vrijednosti veličine t odgovara točno jedna (jedinstvena) vrijednost veličine s, a da obratno ne mora biti.

Primjer 8.3. [Vrijednosti koje postiže veličina]

(i) Pri jednolikom pravom gibanju čestice po pravcu, svakoj vrijednosti veličine t odgovara jedinstvena vrijednost veličine s i obratno, tj. čestica se ne može naći u istom položaju za dva različita trenutka.

(ii) Pri vertikalnom hicu, svakom t odgovara jedinstven s, međutim obratno ne vrijedi jer će čestica neke položaje postići dva puta - pri gibanju u vis i pri padu (Slika 8.3):

- u $t = t_1$ čestica je u točki A i giba se prema gore
- u $t = t_2$ čestica je također u točki A, ali se giba prema dolje.



Slika 8.3: Primjer 8.4

□

8.3.2 Pravilo prema kojem su povezane dvije veličine

Dvije zavisne veličine na različite načine mogu ovisiti jedna o drugoj.

Primjer 8.4. Odredimo pravilo prema kojemu zavise t i s pri gibanju po pravcu stalnom brzinom $v = 3$ ako je:

(i) u $t = 0$ čestica bila u $s = 0$

(ii) u $t = 0$ čestica bila u $s = 2$.

(i) $s(t) = 3t$

(ii) $s(t) = 3t + 2$.

Uočimo da se pomoću tih formula može odrediti položaj u svakom trenutku. □

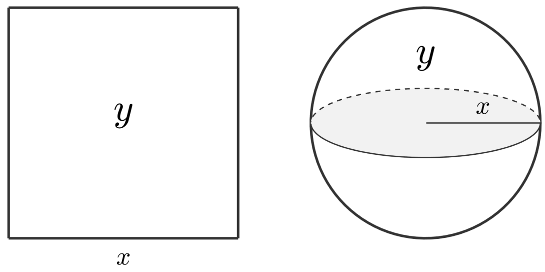
Primjer 8.5. Odredimo pravilo prema kojem zavise (Slika 8.4):

(i) duljina stranice kvadrata x i njegova površina y

(ii) polumjer kugle x i njen obujam y.

(i) $y(x) = x^2$

(ii) $y(x) = \frac{4\pi}{3}x^3$.



Slika 8.4: Primjer 8.5

□

8.3.3 Pojam funkcije

Gibanje po pravcu mogli smo zamisliti kao pridruživanje koje svakoj vrijednosti varijable t pridružuje neku vrijednost varijable s. Slično bi se mogle interpretirati veze drugih spomenutih veličina. Svugdje možemo uočiti:

1. Skup A vrijednosti prve veličine
2. Skup B vrijednosti druge (zavisne) veličine
3. **Pravilo zavisnosti**, tj. pravilo f prema kojemu druga (zavisna) veličina ovisi o prvoj. Vrijednost druge veličine koja odgovara vrijednosti x prve veličine, prema pravilu f, označava se kao $f(x)$.

Kažemo da je f **funkcija** sa skupa A u skup B i pišemo

$$f : A \to B.$$

Prva (nezavisna) varijabla x naziva se i **argument**. Kažemo da je:

$f(x)$ vrijednost funkcije f u x

A **domena - područje definicije**

B **kodomena - područje vrijednosti**.

Primjer 8.6. [Pravila zavisnosti]
Zapišimo pomoću f pravila zavisnosti iz prethodnih primjera:

Primjer 8.4

(i) $f(t) := 3t$

(ii) $f(t) := 3t + 2$.

Primjer 8.5

(i) $f(x) := x^2$

(ii) $f(x) := \frac{4\pi}{3}x^3$.

□

Ovakvim zapisima kažemo da smo funkciju zadali **analitički** jer smo dali formulu prema kojoj funkcija djeluje. Uočimo da se analitički zapis funkcije sastoji od:

1. lijeve strane, na primjer, $f(x)$. Tu je f funkcija, a x argument (prva varijabla)

2. znaka $:=$ koji se čita *jednako je prema definiciji*. Taj znak koristimo umjesto obične jednakosti, da bi se zadavanje funkcije razlikovalo od jednadžbe.

3. desne strane - analitičkog izraza, na primjer x^2.

Sve skupa, tj. $f(x) := x^2$ znači da se vrijednosti funkcije f računaju prema pravilu koje je zadano izrazom na desnoj strani.
U analitičkom zapisu funkcije nigdje se ne spominje kako se označava druga varijabla (a možemo je označiti kao $y, z, \ldots$).

Primjer 8.7. [Vrijednost funkcije u točki]
Odredimo vrijednost u 4 funkcija f iz Primjera 8.4 i 8.5. Treba izračunati $f(4)$:

Ako je $f(t) := 3t$, onda je $f(4) = 3 \cdot 4 = 12$.

Ako je $f(t) := 3t + 2$, onda je $f(4) = 3 \cdot 4 + 2 = 14$.

Ako je $f(x) := x^2$, onda je $f(4) = 4^2 = 16$.

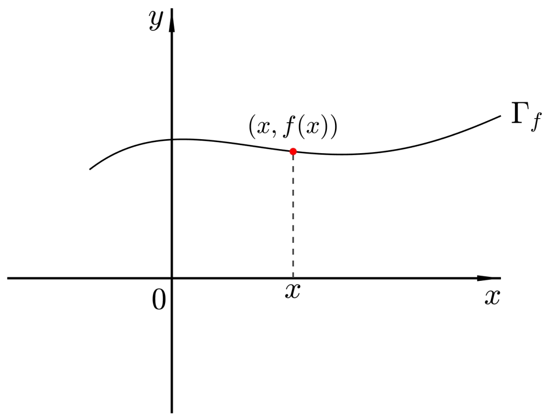
Ako je $f(x) := \frac{4\pi}{3}x^3$, onda je $f(4) = \frac{4\pi}{3}4^3 = \frac{256}{3}\pi$. □

8.3.4 Graf funkcije

Da bismo je bolje dočarali, funkciju možemo predočiti dinamički. Na primjer, gibanje na pravcu možemo kompjutorski simulirati tako da doživimo kretanje čestice, promjenu brzine i sl.
Drugi, puno važniji i tehnički jednostavniji pristup, jest *grafičko predočavanje funkcije*, kojim, za svaku vrijednost argumenta x (nezavisne varijable), geometrijski predočavamo odgovarajuću vrijednost zavisne varijable y, tj. vrijednost $f(x)$.

To postižemo tako da u koordinatnoj ravnini na horizontalnu os nanosimo x-vrijednosti, a na vertikalnu y-vrijednosti. Da naznačimo da vrijednosti argumenta x odgovara vrijednost $f(x)$ zavisne varijable y, ucrtavamo točku, odnosno uređeni par $(x, f(x))$. Skup svih takvih točaka, gdje x prolazi domenom funkcije f, zovemo **graf funkcije** i označavamo s G_f ili Γ_f, Slika 8.5:

$$\Gamma_f := \{(x, f(x))\}.$$



Slika 8.5: Graf Γ_f funkcije f

Uočimo sljedeće:

Koordinatna se ravnina sastoji od svih mogućih uređenih parova (x, y) gdje su x i y realni brojevi. Tu su koordinate x i y *nezavisne*, tj. među njima nema nikakvih veza; zato je ravnina *dvodimenzionalna*.

Graf funkcije sastoji se od uređenih parova (x, y) gdje x i y *nisu nezavisni*, već među njima postoji jedna veza:

$$y = f(x).$$

Zato se dimenzija spušta za 1, pa je graf funkcije jednodimenzionalan, a kako je potpuno određen gornjom vezom, nju zovemo **jednadžba grafa**. Tu jednadžbu obično i pišemo uz graf, umjesto oznake Γ_f.

Dakle, treba razlikovati:

f - to je funkcija

$f(x)$ - to je vrijednost funkcije f u x

$y = f(x)$ - to je jednadžba grafa (jednadžba s dvjema nepoznanicama, poput jednadžbe pravca, kružnice i sl.)

$f(x) = 0$ - to je jednadžba (s jednom nepoznanicom) pridružena funkciji f.

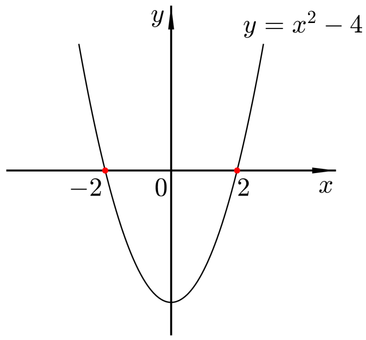
Primjer 8.8. [Graf funkcije]
Neka je funkcija f zadana s $f(x) := x^2 - 4$. Tada je njen graf *parabola* s jednadžbom

$$y = x^2 - 4.$$

Skup rješenja te jednadžbe je beskonačan jer se radi o jednoj jednadžbi s dvjema nepoznanicama - i geometrijski je parabola.
Jednadžba

$$x^2 - 4 = 0$$

je jednadžba (s jednom nepoznanicom) pridružena funkciji f i ima dva rješenja: ± 2, a geometrijski su to apscise točaka u kojima graf funkcije f siječe x-os, Slika 8.6.



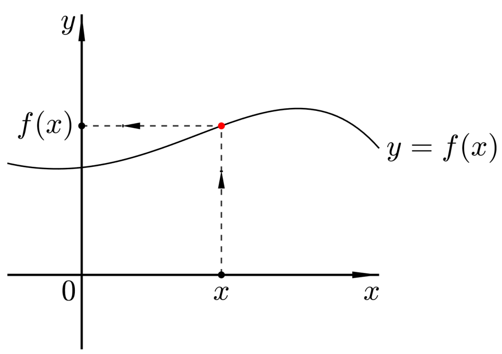
Slika 8.6: Primjer 8.8

□

8.3.5 Očitavanje vrijednosti funkcije iz grafa funkcije

Ako je poznat graf funkcije, onda možemo grafički približno odrediti vrijednost funkcije f u x ovako (Slika 8.7):

1. korak: iz točke s koordinatom x na x-osi povlačimo okomicu.
2. korak: određujemo točku u kojoj okomica siječe graf.
3. korak: kroz točku presjeka povlačimo paralelu s x-osi.
4. korak: određujemo točku u kojoj paralela siječe y-os: ta točka ima koordinatu $f(x)$.

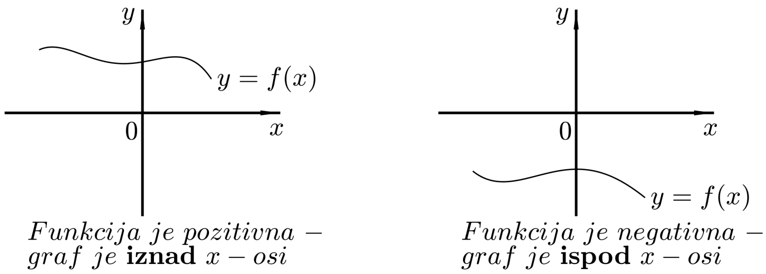


Slika 8.7: Očitavanje vrijednosti funkcije iz grafa funkcije

8.3.6 Očitavanje svojstava funkcije iz grafa funkcije

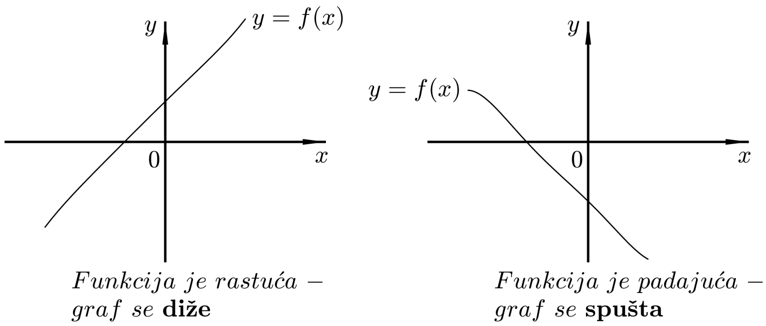
Iz grafa funkcije zorno se očituju važna svojstva funkcije:

(i) **pozitivnost/negativnost**, Slika 8.8



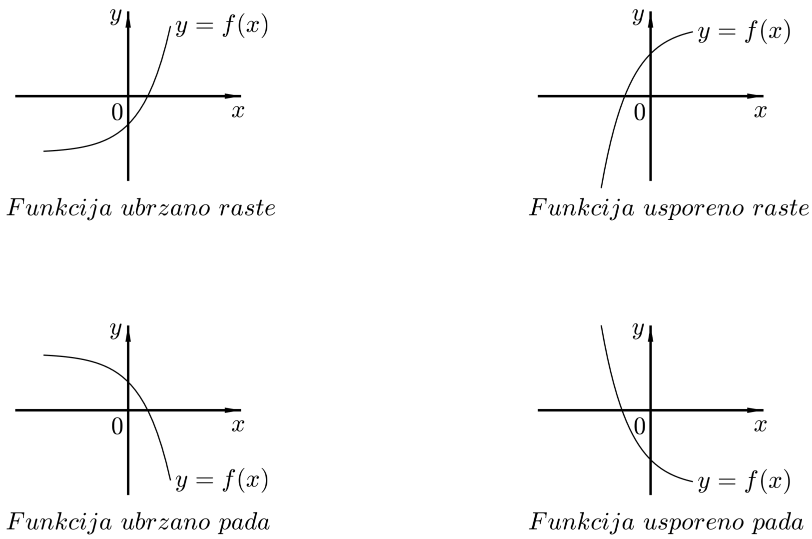
Slika 8.8: Pozitivnost/negativnost

(ii) **rast/pad**, Slika 8.9



Slika 8.9: Rast/pad

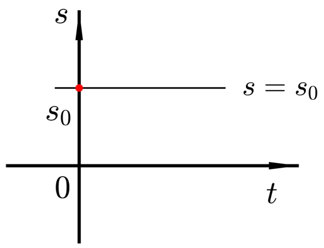
(iii) **ubrzani rast/pad** i **usporeni rast/pad**, Slika 8.10.



Slika 8.10: Ubrzani rast/pad i usporeni rast/pad

Primjer 8.9. [s-t dijagram]
To je graf zavisnosti položaja s čestice koja se giba po pravcu i vremena t. On dočarava kako se čestica giba po pravcu s-osi, dok vrijeme protječe (ide po t-osi od lijeva prema desno). Treba razlikovati ova jednostavna gibanja po pravcu:

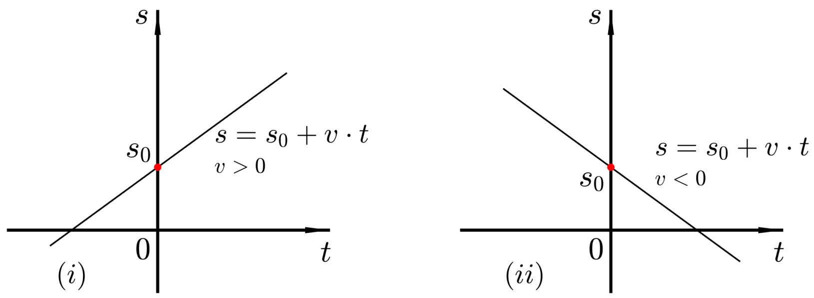
1. Mirovanje - graf je paralelan s t-osi (Slika 8.11)



Slika 8.11: s − t dijagram - prikaz mirovanja

2. (i) Jednoliko u pozitivnom smjeru - graf je pravac s pozitivnim koeficijentom smjera (Slika 8.12 (i))

   (ii) Jednoliko u negativnom smjeru - graf je pravac s negativnim koeficijentom smjera (Slika 8.12 (ii))



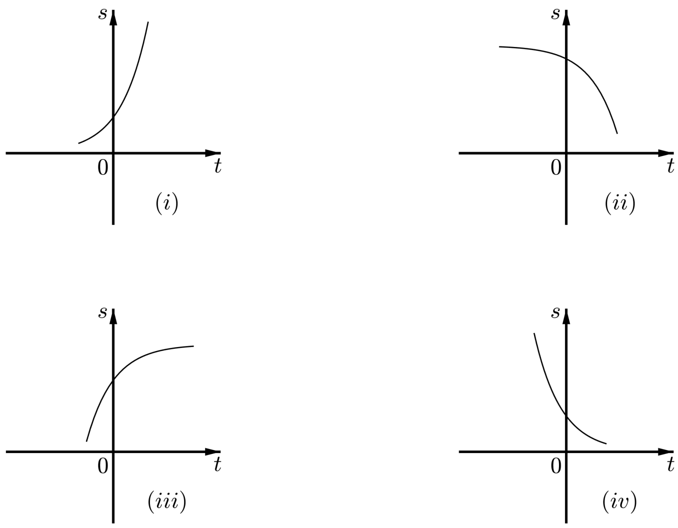
Slika 8.12: s − t dijagram - prikaz jednolikog gibanja

3. (i) Ubrzano u pozitivnom smjeru - graf je rastući i konveksan (Slika 8.13 (i)). Smisao je da se u jednakim vremenskim intervalima vrijednosti funkcije povećavaju za sve veće iznose.

   (ii) Ubrzano u negativnom smjeru - graf je padajući i konkavan (Slika 8.13 (ii)). Smisao je da se u jednakim vremenskim intervalima vrijednosti funkcije smanjuju za sve veće iznose.

4. (i) Usporeno u pozitivnom smjeru - graf je rastući i konkavan (Slika 8.13 (iii)). Smisao je da se u jednakim vremenskim intervalima vrijednosti funkcije povećavaju za sve manje iznose.

(ii) Usporeno u negativnom smjeru - graf je padajući i konveksan (Slika 8.13 (iv)). Smisao je da se u jednakim vremenskim intervalima vrijednosti funkcije smanjuju za sve manje iznose.



Slika 8.13: $s-t$ dijagram - prikaz ubrzanog i usporenog gibanja

□

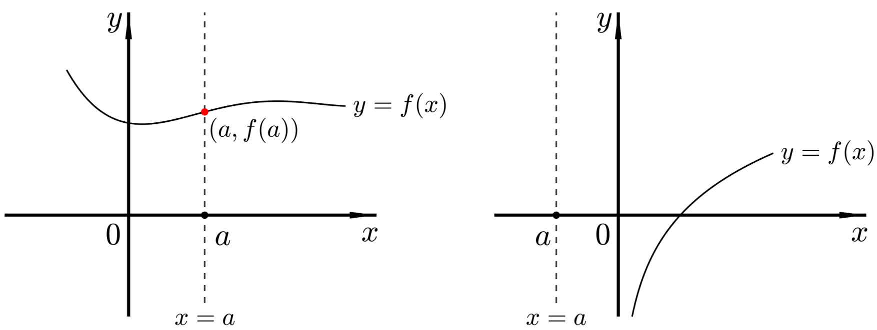
8.3.7 Grafičko rješavanje jednadžba – inverzna funkcija

Uočimo ovo svojstvo grafa funkcije:

Pravac okomit na x-os, tj. pravac s jednadžbom

$$x = a$$

siječe graf funkcije točno u jednoj točki ili ni u jednoj - ovisno o tome postoji li $f(a)$ ili ne postoji (Slika 8.14).



Pravac $x = a$ siječe graf funkcije f u točki $(a, f(a))$

Pravac $x = a$ ne siječe graf funkcije f jer ne postoji $f(a)$

Slika 8.14: Presjek pravca $x = a$ i grafa funkcije

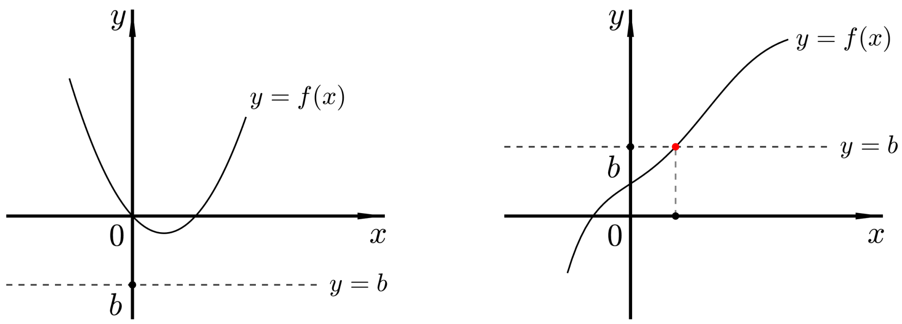
Razmotrimo sad pravac usporedan s x-osi, tj. pravac s jednadžbom

$$y = b$$

i njegov presjek s grafom funkcije. Tu mogu nastupiti ove mogućnosti:

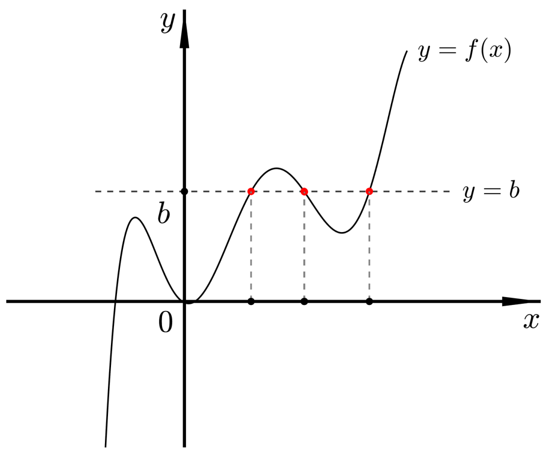
1. Pravac ne siječe graf funkcije f - to znači da jednadžba $f(x) = b$ nema rješenja (Slika 8.15)

2. Pravac siječe graf funkcije f u jednoj točki - to znači da jednadžba $f(x) = b$ ima točno jedno rješenje (Slika 8.15)



Slika 8.15: Presjek pravca $y = b$ i grafa funkcije - mogućnosti 1. i 2.

3. Pravac siječe graf funkcije f u dvije ili više točaka - to znači da jednadžba $f(x) = b$ ima dva ili više rješenja (Slika 8.16).



Slika 8.16: Presjek pravca $y = b$ i grafa funkcije - mogućnost 3.

Ako nastaju samo mogućnosti 1. i 2. onda funkcija ima **inverznu funkciju**. O tome ćemo više govoriti u sljedećoj lekciji.

8.4 PRIMJENA MATLAB-A

8.4.1 Zadavanje funkcija i rad s njima. Naredbe `@`, `function`, `feval` i `fplot`

Funkcije se mogu zadavati korištenjem funkcijskog operatora `@`. Na primjer, za funkciju $f(x) = x^2 - 4$ iz Primjera 8.8 imamo:

```
f = @(x) x.^2 - 4
```

Primijetimo točku u gornjem izrazu - ona je tu zato što su u MATLAB-u varijable zadane vektorski: oznaka `x.^2` znači da se kvadrira *svaki pojedini* element vektora x.
Druga mogućnost za zadavanje funkcija je pomoću `function ... end` s tim da se to treba uraditi na *na kraju* tog programa:

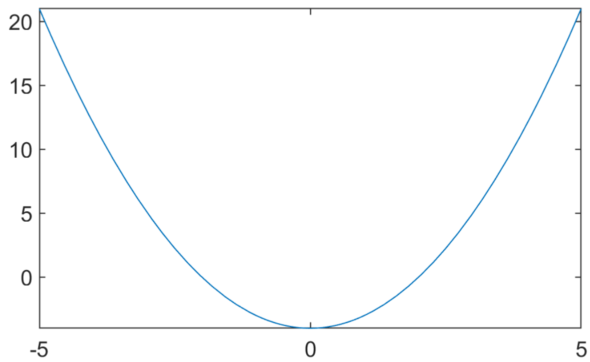
```
function f(x)
     f = x.^2 - 4
end
```

Vrijednost funkcije f u točki računamo na uobičajeni način ili s `feval`:

```
f(3)                                                    % 5
feval(f, 3)                                             % 5
```

Za brzo crtanje grafa koristimo `fplot` bez dodatnih argumenata:

```
fplot(f)
```

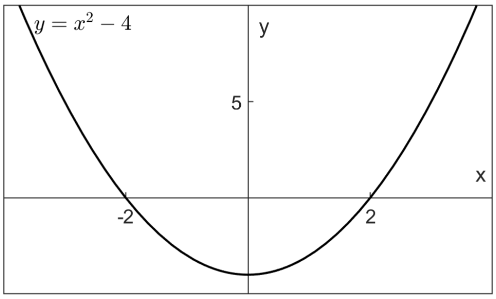


Granice unutar kojih se prikazuje graf zadan s `fplot(f)` određene su automatski. Ukoliko želimo sami odrediti elemente prikaza, koristimo dodatne argumente. Na primjer, kako bismo graf prikazali na intervalu $[-4, 4]$ linijom crne boje i odgovarajuće širine, pišemo:

```
fplot(f, [-4 4], 'k', 'LineWidth', 1)
```

Za još bolju kontrolu nad prikazom, koristimo naredbe koje smo upoznali u ranijim lekcijama. Dodatno, kako bismo dobili ljepši prikaz naslova grafa, u naredbi `text` koristimo LaTeX kao interpreter teksta. Jednadžbu grafa $y = x^2 - 4$ zbog toga smo stavili unutar simbola \$ \$, što je uobičajeni način navođenja matematičkih izraza u LaTeX-u:

```
xlim([-4, 4]); ylim([-5, 10])
text(-3.5, 9, '$y = x^2 - 4$', 'interpreter', 'latex')
xlabel('x'); ylabel('y')
ax = gca
ax.XAxisLocation = 'origin'
ax.YAxisLocation = 'origin'
```



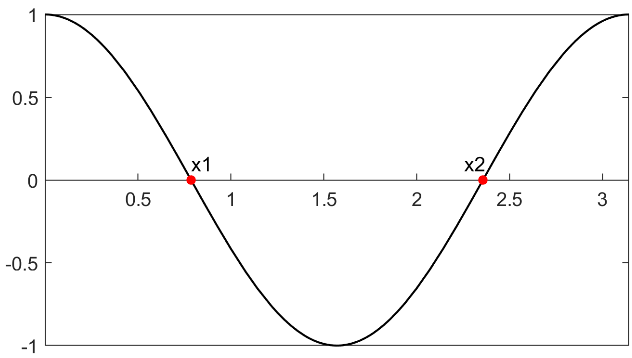
8.4.2 Određivanja nultočaka funkcije. Naredba `fzero`

Rješavanje jednadžbe $f(x) = 0$ pridružene funkciji, tj. računanje nultočki, pokažimo na primjeru funkcije $f(x) = \cos(2x)$. Koristimo naredbu `fzero(f, x0)` koja nultočku traži u blizini zadane početne vrijednosti `x0`. Vidimo da za različite početne vrijednosti dobivamo različite nultočke:

```
f = @(x) cos(2*x)
x1 = fzero(f, 1)                                    % 0.7854
x2 = fzero(f, 2)                                    % 2.3562
```

Prikažimo te nultočke grafički:

```
fplot(f, [0, pi], 'k', 'LineWidth', 1)
hold on
plot(x1, f(x1), 'r.', x2, f(x2), 'r.', 'MarkerSize', 16)
text(x1, 0.1, 'x1'); text(x2 - 0.1, 0.1, 'x2')
ax = gca
ax.XAxisLocation = 'origin'
ax.YAxisLocation = 'origin'
```



Ovdje je bitno napomenuti da fzero pronalazi nultočke detekcijom promjene predznaka vrijednosti funkcije, što znači da za funkciju $f(x) = x^2$ neće uspjeti naći nultočku $x_0 = 0$ jer u njoj funkcija ne mijenja predznak. Uvjerimo se u to tako da zadamo početnu vrijednost relativno blizu nuli:

```
f = @(x) x.^2
xnul = fzero(f, 0.1)
```

```
Exiting fzero: aborting search for an interval containing a
sign change because NaN or Inf function value encountered
during search. (Function value at -1.37296e+154 is Inf.)
Check function or try again with a different starting value.

xnul = NaN
```

8.4.3 Simboličko zadavanje funkcije. Naredba syms

Funkcije se mogu zadati i simbolički, naredbom syms. Na primjer, za funkciju iz Primjera 8.8:

```
syms x
f(x) = x^2 - 4
```

Primijetimo da ovdje nismo trebali koristiti oznaku `x.^2`, već samo `x^2`. S ovako zadanom funkcijom možemo raditi isto što i s funkcijom zadanom pomoću @, ali imamo i dodatne naredbe: za rješavanje jednadžba, za nalaženje inverzne funkcije te za deriviranje, integriranje i rješavanje diferencijalnih jednadžbi, o čemu će biti više govora u sljedećim lekcijama.

8.4.4 Određivanje nultočaka simbolički zadane funkcije. Naredbe solve i vpasolve

Pokažimo kako se pomoću naredbe solve simbolički nalaze nultočke funkcije, tj. kako se rješava jednadžba $f(x) = 0$:

```
solve(f)                                          % [-2; 2]
```

Za $f(x) = x^2$ dobivamo nulu kao dvostruku nultočku koju, podsjetimo se, nismo uspjeli dobiti naredbom fzero:

```
syms x
f(x) = x^2
solve(f)                                           % [0; 0]
```

Kod funkcije $f(x) = \cos(2x)$ koja ima beskonačno mnogo nultočaka ovisnih o parametru, naredbi solve potrebno je dodati argument `'ReturnConditions'` s vrijednošću `true`. Tako solve, pri ispisu rješenja, vraća sve parametre o kojima ovisi rješenje, kao i eventualne uvjete na rješenje:

```
syms x
f(x) = cos(2*x)
rj = solve(f, 'ReturnConditions', true)
```

```
rj =
  struct with fields:
             x: [1×1 sym]
    parameters: [1×1 sym]
    conditions: [1×1 sym]
```

Vidimo da je rješenje struktura s poljima. Ispišimo ta polja:

```
rjesenje = rj.x                              % pi/4 + (pi*k)/2
parametri = rj.parameters                                  % k
uvjeti = rj.conditions                    % in(k, 'integer')
```

Primjećujemo da smo dobili ispravno rješenje koje ovisi o parametru `k`, a uvjet `in(k, 'integer')` kaže da parametar `k` mora biti cijeli broj.

Za razliku od `solve`, naredba `vpasolve` rješava jednadžbe numerički. Kod `vpasolve` možemo, ali i ne moramo zadati početnu vrijednost u okolini koje tražimo nultočku - ako je ne zadamo, algoritam daje jednu ili više nultočaka na koje naiđe. Vidimo da za funkciju $f(x) = x^2 - 4$ algoritam pronalazi obje nultočke:

```
syms x
f(x) = x^2 - 4
vpasolve(f)                                    % [-2.0; 2.0]
```

Kao i kod `solve`, i kod `vpasolve` dobivamo dvostruku nultočku funkcije $f(x) = x^2$:

```
syms x
f(x) = x^2
vpasolve(f)                                        % [0; 0]
```

Kod $f(x) = \cos(2x)$ vidimo da, bez zadane početne vrijednosti, algoritam pronalazi nultočku koja nije posebno zanimljiva. Također, provjeravamo da se doista radi o nultočki:

```
syms x
f(x) = cos(2*x)
nultocka = vpasolve(f)  % -226.98006922186256147892598444194
f(nultocka)           % -4.1417367212541150028691564953307e-39
```

Ako kao početnu vrijednost zadamo točku $x_0 = 1$, kao rješenje dobivamo nultočku $\frac{\pi}{4}$ danu u decimalnom zapisu:

```
vpasolve(f, 1)          % 0.78539816339744830961566084581988
```

8.5 PITANJA I ZADATCI

1. Neka je $s(t) = 3t + 2$ položaj čestice na koordinatnom pravcu u trenutku t, kao u Primjeru 8.4 (ii).
   (i) Koji će biti položaj čestice u $t = 5$?
   (ii) U kojem će trenutku čestica biti u položaju $s = 41$?
   (iii) U kojem je trenutku čestica bila u položaju $s = 11$?
2. Funkcija $f(x) := \frac{4\pi}{3}x^3$ opisuje obujam kugle u ovisnosti o polumjeru x, kao u Primjeru 8.5 (ii). Koristeći tu činjenicu odredite:
   (i) polumjer kugle obujma 1
   (ii) koliko puta treba povećati polumjer da bi se obujam udvostručio?
3. Mogu li na grafu funkcije dvije točke biti jedna iznad druge?
4. Mogu li na grafu funkcije dvije točke biti na istoj visini?
5. Nacrtajte graf neke funkcije koja:
   (i) ubrzano raste pa usporeno raste
   (ii) usporeno raste pa ubrzano raste.
6. Nacrtajte graf neke funkcije koja:
   (i) ubrzano pada pa usporeno pada
   (ii) usporeno pada pa ubrzano pada.
7. Predočite u istom koordinatnom sustavu grafove funkcija f i g tako da:
   (i) jednadžba $f(x) = g(x)$ nema rješenja
   (ii) jednadžba $f(x) = g(x)$ ima točno jedno rješenje
   (iii) jednadžba $f(x) = g(x)$ ima točno tri rješenja.

9 ELEMENTARNE FUNKCIJE I NJIHOVE PRIMJENE

U lekciji se navode elementarne funkcije, tj. linearne, kvadratne, kubne funkcije i, općenito, potencije i polinomi, racionalne funkcije, eksponencijalne i logaritamske funkcije te trigonometrijske i arkus funkcije. Opisuju se njihova svojstva, crtaju grafovi, usvajaju pripadajuće oznake i tehnika računanja (temeljne elementarne funkcije upravo su one funkcije koje su ugrađene u kalkulator). Naznačuje se uloga tih funkcija u primjenama.

9.1 PRIPADNI PROBLEM

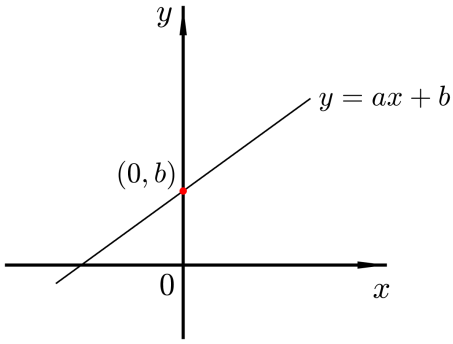
Primjena matematike dobrim je dijelom zasnovana na računanju. Računanje počiva na temeljnim računskim operacijama: zbrajanju (i njenoj inverznoj operaciji oduzimanju), množenju (i njenoj inverznoj operaciji dijeljenju). Uzastopnim množenjem broja sa sobom dolazi se do operacije potenciranja (toj je operaciji inverzna operacija korjenovanja).
U primjenama, te operacije često nisu dovoljne. Drugim riječima, postoje veze među zavisnim veličinama koje se ne mogu, ili se ne mogu jednostavno, zapisati pomoću gornjih operacija. Takve su, na primjer, eksponencijalne veze, odnosno njima inverzne logaritamske veze. Na primjer, eksponencijalnog je tipa veza između količine radioaktivne materije i proteklog vremena.
Također, za opis veze između položaja točke koja titra na pravcu i proteklog vremena, potrebne su trigonometrijske funkcije (njihove inverzne funkcije zovu se arkus funkcijama).

9.2 POTREBNO PREDZNANJE

Pojam funkcije i grafa funkcije. To su pojmovi koji se obrađuje već u osnovnoj i u srednjoj školi, a mi smo ih ponovili u prethodnoj lekciji. Također, u srednjoj je školi obrađivana linearna, kvadratna, eksponencijalna i logaritamska funkcija, trigonometrijske funkcije i polinomi, međutim mi ćemo sve to opet ponoviti. Jedino zaista novo gradivo jesu arkus funkcije.

9.2.1 Linearna funkcija – linearna veza među veličinama

Linearna funkcija je funkcija oblika $f(x) := ax + b$, gdje su realni brojevi a i b *parametri*. Obično se traži da bude $a \neq 0$ jer je inače funkcija konstanta, a graf pravac usporedan s x-osi.
Jednadžba $y = ax + b$ ujedno je jednadžba grafa funkcije f i linearne veze među veličinama x i y, Slika 9.1.



Slika 9.1: Graf linearne funkcije

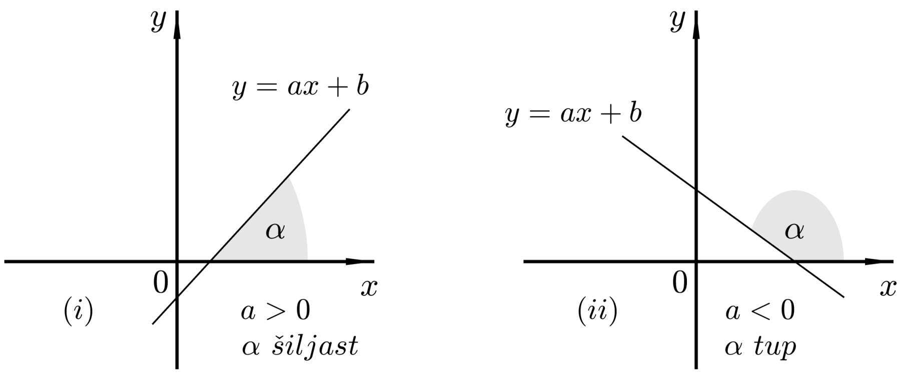
Analitičko i geometrijsko značenje parametara a i b:

Analitički, $b = f(0)$, tj. b je vrijednost varijable y kad je vrijednost varijable x jednaka nuli, što se piše i kao $y(0) = b$. Geometrijski, b je odrezak koji graf odsijeca na y-osi.

Analitički, a je stalni omjer prirasta funkcije i prirasta argumenta:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = a.$$

Geometrijski, a je koeficijent smjera (nagib) pravca - grafa funkcije (Slika 9.2):



Slika 9.2: Linearna funkcija - geometrijsko značenje parametra a

(i) ako je $a > 0$ prikloni je kut pravca šiljast (jer je $a = \tan \alpha$), a funkcija je rastuća. To znači da se, pri povećavanju veličine x, povećava i veličina y.

(ii) ako je $a < 0$ prikloni je kut pravca tup, a funkcija padajuća. To znači da se, pri povećavanju veličine x, veličina y smanjuje.

Mnoge su veze među veličinama linearne, a tipični su primjeri pretvaranje jedinica i jednoliko gibanje po pravcu:

Primjer 9.1. [Pretvaranje jedinica]

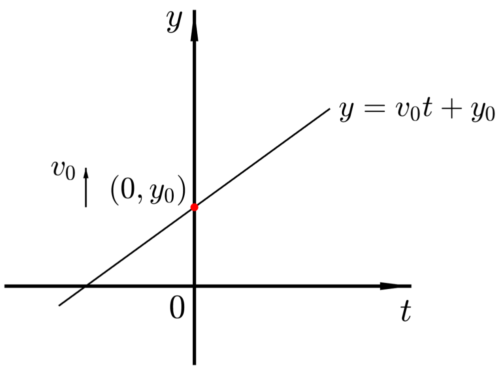
(i) Ako je x vrijednost mase u kilogramima, a y vrijednost mase u gramima, onda je $y = 1000x$. Jezikom funkcija: linearna funkcija $f(x) := 1000x$ "pretvara kilograme u grame".

(ii) ako je x vrijednost temperature u Celziusovim stupnjevima, a y vrijednost iste temperature u Fahrenheitovim stupnjevima, onda je $y = \frac{9}{5}x + 32$. Jezikom funkcija: linearna funkcija $f(x) := \frac{9}{5}x + 32$ "pretvara Celziusove stupnjeve u Fahrenheitove". □

Primjer 9.2. [Jednoliko gibanje po pravcu]
Ako je y koordinata položaja u trenutku t čestice koja se giba po pravcu jednolikom brzinom v_0, a koja u trenutku $t = 0$ zauzima položaj, tj. koordinatu y_0, onda je

$$y = v_0 t + y_0.$$

Tu je stalna brzina v_0 koeficijent smjera, a y_0 odrezak na y-osi i položaj čestice u $t = 0$, Slika 9.3. Jezikom funkcija: linearna funkcija $f(t) := v_0 t + y_0$ opisuje položaj čestice koja se giba jednoliko po pravcu brzinom v_0, a koja u trenutku $t = 0$ ima položaj y_0.

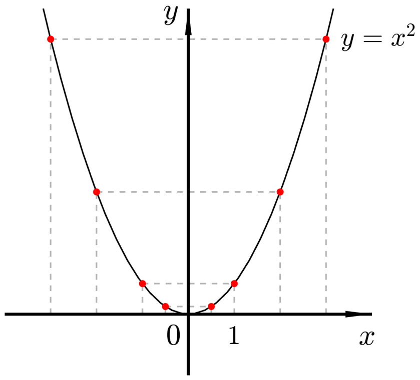


Slika 9.3: Primjer 9.2

□

9.2.2 Kvadratna funkcija. Potencije

Funkcija $f(x) := x^2$ je **funkcija kvadriranja**, tj. stavljanje na drugu potenciju ili, kraće, kvadriranje odnosno druga potencija. Njen je graf parabola s jednadžbom $y = x^2$, Slika 9.4.



x	y
0	0
$\pm\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
± 1	1
± 2	4
± 3	9

Slika 9.4: Graf funkcije kvadriranja

To je primjer kvadratne veze koja, na primjer, povezuje duljinu stranice kvadrata x i njegovu površinu y. Tu y kvadratno ovisi o x.

Nešto složenija, a u primjenama puno češća kvadratna veza jest ona oblika $y = ax^2$ s pripadnom funkcijom $f(x) := ax^2$, gdje je a realni parametar (u pravilu se traži da bude $a \neq 0$).

Primjer 9.3. [Kvadratne veze]
Kvadratne veze oblika $y = ax^2$ su, na primjer:

(i) između duljine stranice jednakostraničnog trokuta i njegove površine

(ii) između polumjera kruga i njegove površine

(iii) između proteklog vremena i duljine prijeđenog puta čestice koja se giba po pravcu pod utjecajem konstantne (stalne) sile, ako je u trenutku kad smo počeli mjeriti vrijeme brzina čestice bila nula (zašto je potreban ovaj posljednji uvjet?). □

Opća **kvadratna funkcija - polinom drugog stupnja** je funkcija

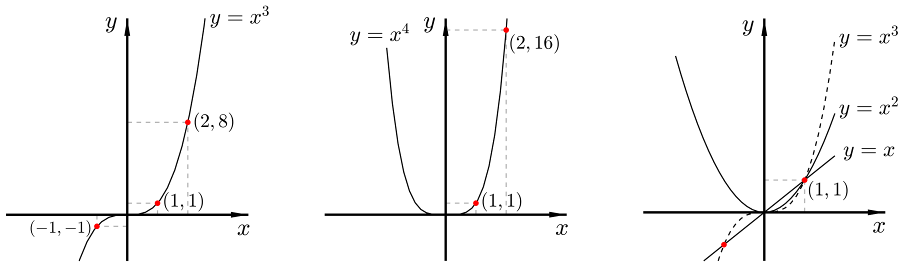
$$f(x) := ax^2 + bx + c,$$

gdje su a, b i c realni parametri i $a \neq 0$. Graf joj je parabola s jednadžbom

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Ta se funkcija i graf podrobno obrađivala u srednjoj školi. Ima veliku ulogu u primjenama, na primjer gibanje na pravcu pod utjecajem stalne sile, poput vertikalnog hitca. Općenito, ona opisuje veze između dviju veličina pri kojoj se, pri promjeni jedne od veličina, brzina promjene druge mijenja linearno, odnosno ako je akceleracija promjene stalna. O tome će više biti riječi poslije.

Potencije su funkcije oblika $f(x) := x^n$, odnosno $f(x) := ax^n$, gdje je n prirodan broj i a realan broj različit od nule. Na Slici 9.5 predočene su potencije za $n = 1, 2, 3, 4$.



Slika 9.5: Grafovi potencija

9.2.3 Inverzna funkcija i inverzna veza među veličinama

Inverzna funkcija linearne funkcije: linearna veza $y = ax + b$ među veličinama x i y eksplicitno pokazuje kako y ovisi o x. Inverzna veza pokazuje kako x ovisi o y: tu je $x = \frac{y-b}{a}$, tj. $x = \frac{y}{a} - \frac{b}{a}$.
Inverzna funkcija linearne funkcije $f(x) := ax + b$ je funkcija

$$f^{-1}(x) := \frac{x}{a} - \frac{b}{a}.$$

Dakle:

Inverzna funkcija linearne funkcije opet je linearna funkcija.

Uočimo da se izraz za inverznu funkciju dobije tako da se u inverznoj vezi stavi x umjesto y. To treba tumačiti ovako:

> Funkcija f najprije x množi s a, potom rezultatu dodaje b.
>
> Inverzna funkcija f^{-1} vrši suprotnu (inverznu) radnju, u suprotnom redoslijedu: f^{-1} najprije od x oduzima b, potom rezultat dijeli s a.

Linearna veza i njoj inverzna veza u istom koordinatnom sustavu predočene su istim pravcem. Naime, svejedno je piše li $y = ax + b$ ili $x = \frac{y}{a} - \frac{b}{a}$. Za razliku od toga, graf linearne funkcije i njoj inverzne funkcije, predočeni u istom koordinatnom sustavu, simetrični su s obzirom na pravac s jednadžbom $y = x$. To vrijedi općenito, a ne samo za linearne funkcije.

Primjer 9.4. [Inverzna veza i inverzna funkcija za linearnu funkciju] Navodimo nekoliko parova međusobno inverznih linearnih veza i njima pridruženih parova međusobno inverznih linearnih funkcija. Crtežom (Slika 9.6) potvrđujemo da su grafovi međusobno inverznih linearnih funkcija simetrični obzirom na pravac $y = x$.

(i) Veze $y = x - 3$ i $x = y + 3$. Na jeziku funkcija imamo

$$f(x) := x - 3 \quad \text{i} \quad f^{-1}(x) = x + 3,$$

s jednadžbama pripadnih grafova $y = x - 3$ i $y = x + 3$.

(ii) Veze $y = 3x$ i $x = \frac{y}{3}$. Na jeziku funkcija imamo

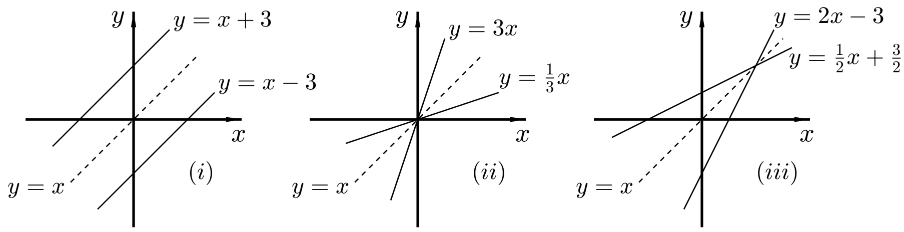
$$f(x) := 3x \ \text{ i } \ f^{-1}(x) = \frac{x}{3},$$

s jednadžbama pripadnih grafova $y = 3x$ i $y = \frac{x}{3}$.

(iii) Veze $y = 2x - 3$ i $x = \frac{y+3}{2}$. Na jeziku funkcija imamo

$$f(x) := 2x - 3 \ \text{ i } \ f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2},$$

s jednadžbama pripadnih grafova $y = 2x - 3$ i $y = \frac{x+3}{2}$.



Slika 9.6: Primjer 9.4

□

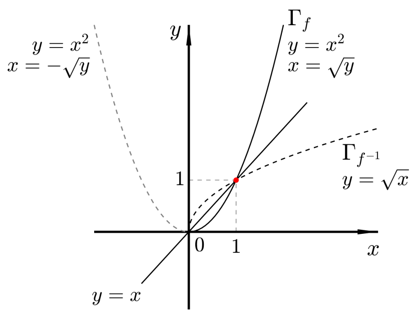
Inverzna funkcija funkcije kvadriranja - funkcija "drugi korijen": od prije je poznato da je "korjenovanje inverzno potenciranju" i oznake $\sqrt{\ }$ za drugi korijen, odnosno $\sqrt[n]{\ }$ za n-ti korijen.
Ako je $y = x^2$ onda je, općenito, $x = \pm\sqrt{y}$. Za te dvije veze ne govorimo da su međusobno inverzne, već samo da su ekvivalentne. To je zato što u vezi $y = x^2$ dvije različite, međusobno suprotne, vrijednosti veličine x odgovaraju istoj vrijednosti veličine y. Izuzetak je kad obje veličine imaju vrijednost 0.
Ako se ograničimo *samo na pozitivne* vrijednosti x, onda su

$$y = x^2 \ \text{ i } \ x = \sqrt{y}$$

međusobno inverzne veze. Tu smo $\pm$ izbacili jer je $x \geqslant 0$, a poznato je da su vrijednosti drugog korijena također pozitivne (ili nula). Zato su funkcije

$$f(x) := x^2, \ x \geqslant 0 \ \text{ i } \ f^{-1}(x) := \sqrt{x}$$

međusobno inverzne i njihovi su grafovi simetrični s obzirom na pravac s jednadžbom $y = x$, Slika 9.7.



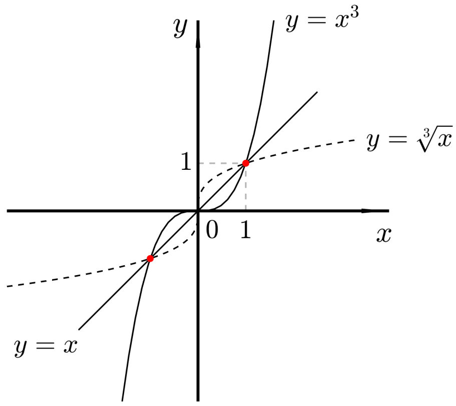
Slika 9.7: Grafovi funkcija druge potencije i drugog korijena

Slično:

Veze $y = x^3$ i $x = \sqrt[3]{y}$ međusobno su inverzne, a

$$f(x) := x^3 \ \text{ i } \ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

međusobno su inverzne funkcije (tu nema ograničenja na x). Tako je i za petu, sedmu i, općenito, neparnu potenciju (Slika 9.8).

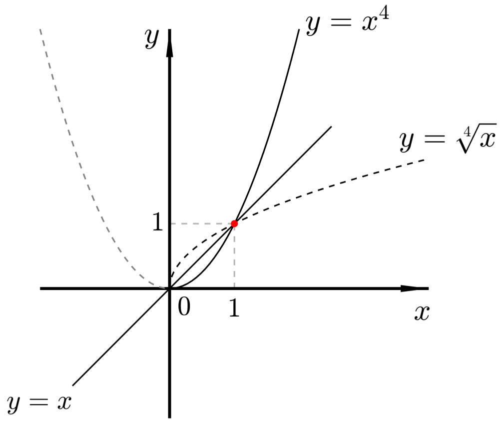


Slika 9.8: Grafovi funkcija treće potencije i trećeg korijena

Veze $y = x^4$ za $x \geqslant 0$ i $x = \sqrt[4]{y}$ međusobno su inverzne, odnosno

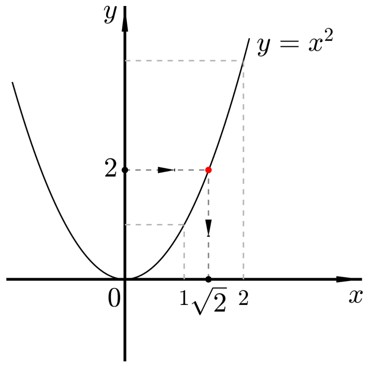
$$f(x) := x^4 \text{ za } x \geqslant 0 \ \text{ i } \ f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$$

međusobno su inverzne funkcije. Tako je i za šestu, osmu i svaku parnu potenciju (Slika 9.9).



Slika 9.9: Grafovi funkcija četvrte potencije i četvrtog korijena

Primjer 9.5. [Grafičko određivanje vrijednosti inverzne funkcije] Zadan je koordinatni sustav u koji je ucrtan graf kvadratne funkcije $f(x) := x^2$. Taj nam graf može pomoći da grafički približno odredimo $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ i, općenito, $\sqrt{a}$, ako je poznat $a > 0$. Na primjer, $\sqrt{2}$ dobit ćemo tako da na y-osi iz 2 idemo usporedno s x-osi u pozitivnom usmjerenju do grafa, potom iz te točke okomito na x-os, koju ćemo presjeći u točki s koordinatom $\sqrt{2}$, Slika 9.10.



Slika 9.10: Primjer 9.5

□

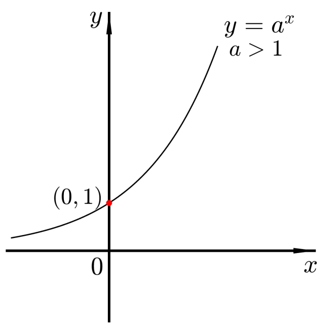
9.2.4 Eksponencijalna i logaritamska funkcija

Ponovimo: ako je **baza** $a > 1$, onda **eksponencijalna funkcija**

$$f(x) := a^x$$

ima ova svojstva (Slika 9.11):

1. f ubrzano raste
2. f je pozitivna, tj. graf joj je iznad x-osi
3. f je definirana za svaki x, tj. a^x postoji za svaki x, odnosno svaki pravac okomit na x-os siječe graf
4. $f(0) = 1$ jer je $a^0 = 1$, tj. točka $(0, 1)$ je točka grafa
5. (i) $a^x > 1$ za $x > 0$
   (ii) $a^x < 1$ za $x < 0$.



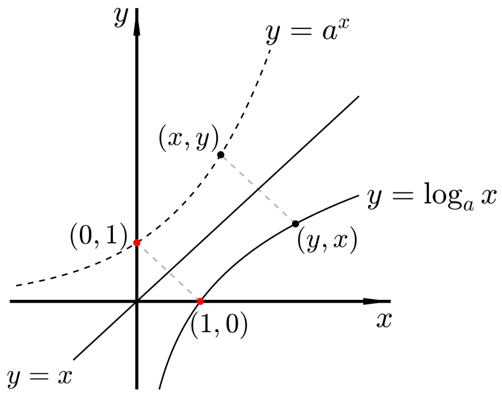
Slika 9.11: Graf eksponencijalne funkcije s bazom a većom od 1

Inverzna funkcija eksponencijalne funkcije $f(x) := a^x$ je **logaritamska funkcija s bazom** a, tj. funkcija

$$f^{-1}(x) := \log_a(x),$$

a inverzna veza eksponencijalne veze $y = a^x$ jest logaritamska veza $x = \log_a(y)$.
Svojstva logaritamske funkcije $f^{-1}(x) = \log_a(x)$ s bazom $a > 1$, inverzna onima eksponencijalne funkcije f, jesu (Slika 9.12):

1. f^{-1} usporeno raste
2. f^{-1} je definirana samo za $x > 0$, tj. graf joj je desno od y-osi
3. f^{-1} postiže sve vrijednosti, tj. svaki pravac okomit na y-os siječe graf
4. $f^{-1}(1) = 0$ jer je $\log_a(1) = 0$, tj. točka $(1, 0)$ je točka grafa
5. (i) $\log_a(x) > 0$ za $x > 1$, tj. graf je iznad x-osi za $x > 1$
   (ii) $\log_a(x) < 0$ za $0 < x < 1$ tj. graf je ispod x-osi za $0 < x < 1$.

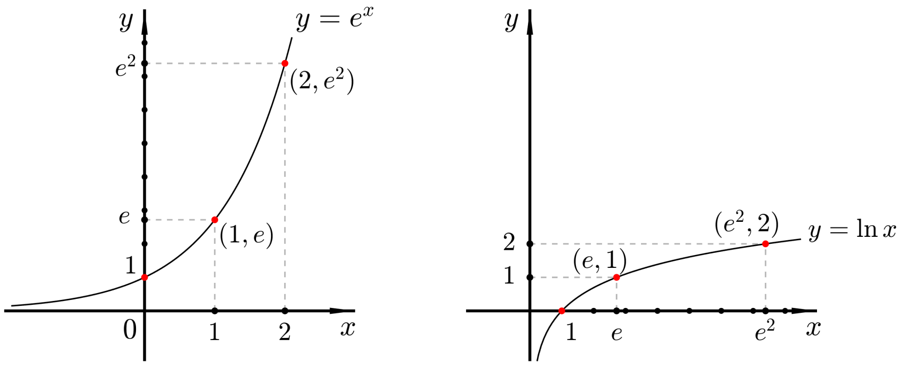


Slika 9.12: Graf logaritamske funkcije s bazom a većom od 1

Primjer 9.6. [Prirodni logaritam]
U primjenama se prirodno javlja broj $e \approx 2.7$, koji je iracionalan, čak i transcendentan. Logaritam s bazom e označava se obično kao ln, a eksponencijalna funkcija s bazom e kao exp:

$$\exp(x) := e^x \quad \ln(x) := \log_e(x).$$

Na Slici 9.13 predočeni su grafovi ovih funkcija s nekoliko istaknutih točaka.



Slika 9.13: Primjer 9.6

□

Također, logaritamsku funkciju s bazom 10 obično pišemo bez baze, kao log:

$$\log(x) := \log_{10}(x).$$

Eksponencijalne funkcije (odnosno logaritamske) dijele se u dvije skupine:

(I) U kojoj je baza $a > 1$. Te smo funkcije već razmatrali i jedno od svojstava tih funkcija da su *rastuće*.

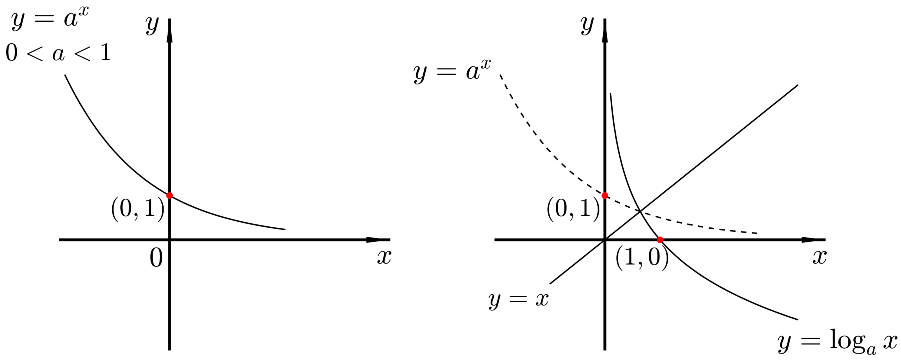
(II) U kojoj je $0 < a < 1$. Te funkcije imaju svojstva analogna onima za $a > 1$, a *glavna* je razlika da su te funkcije *padajuće*.

Eksponencijalna i logaritamska funkcija s bazom manjom od 1
Ako je $f(x) := a^x$ i $0 < a < 1$, onda (Slika 9.14):

1. f usporeno pada u smislu da se, za jednaka povećanja od x, vrijednost $f(x)$ smanjuje za sve manje iznose
2. f je pozitivna, tj. graf joj je iznad x-osi
3. f je definirana za svaki x, tj. a^x postoji za svaki x, odnosno svaki pravac okomit na x-os siječe graf
4. $f(0) = 1$ jer je $a^0 = 1$, tj. točka $(0, 1)$ je točka grafa
5. (i) $a^x < 1$ za $x > 0$
   (ii) $a^x > 1$ za $x < 0$.

Funkcija $f^{-1}(x) = \log_a(x)$ za $0 < a < 1$ ima ova svojstva (Slika 9.14):

1. f^{-1} usporeno pada
2. f^{-1} je definirana samo za $x > 0$, tj. graf joj je desno od y-osi
3. f^{-1} postiže sve vrijednosti, tj. svaki pravac okomit na y-os siječe graf
4. $f^{-1}(1) = 0$ jer je $\log_a(1) = 0$, tj. točka $(1, 0)$ je točka grafa
5. (i) $\log_a(x) > 0$ za $0 < x < 1$, tj. graf je iznad x-osi za $0 < x < 1$
   (ii) $\log_a(x) < 0$ za $x > 1$, tj. graf je ispod x-osi za $x > 1$.



Slika 9.14: Grafovi eksponencijalne i logaritamske funkcije s bazom a manjom od 1

Važna **svojstva** koja imaju sve eksponencijalne funkcije i njima analogna svojstva logaritamskih funkcija:

(I)

$$\begin{aligned} \mathit{zbroj\ prelazi\ u\ umnožak}: &\quad a^{x+y} = a^x \cdot a^y \\ \mathit{umnožak\ prelazi\ u\ zbroj}: &\quad \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathit{razlika\ prelazi\ u\ količnik}: &\quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \\ \mathit{količnik\ prelazi\ u\ razliku}: &\quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y). \end{aligned}$$

(II)

$$\begin{aligned} \mathit{potenciranje\ prelazi\ u\ množenje}: &\quad (a^x)^y = a^{xy} \\ \mathit{potenciranje\ prelazi\ u\ množenje}: &\quad \log_a(x^y) = y\log_a(x). \end{aligned}$$

Kod svojstava logaritamskih funkcija u (I) treba biti $x > 0$ i $y > 0$, a u (II) isto $x > 0$ dok y može biti bilo kakav.

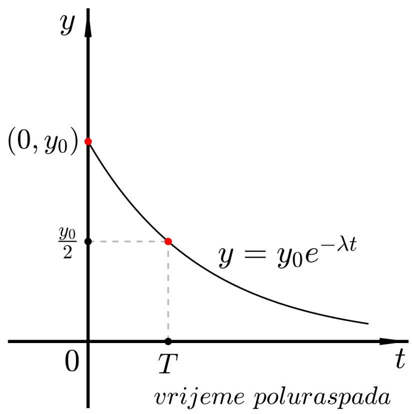
Važna **svojstva koja povezuju eksponencijalnu i logaritamsku funkciju s jednakim bazama** - par međusobno inverznih funkcija:

$$\begin{aligned} \log_a(a^x) &= x \quad \mathit{za\ svaki\ realan\ broj}\ x \\ a^{\log_a(x)} &= x \quad \mathit{za\ svaki\ pozitivan\ broj}\ x,\ \text{tj.}\ \mathit{za}\ x > 0. \end{aligned}$$

Primjer 9.7. [Primjer eksponencijalne zavisnosti]
Neka je t vrijeme i y količina radioaktivne materije. Tada su te dvije veličine eksponencijalno zavisne (u idealnim uvjetima):

$$y = y_0 e^{-\lambda t}.$$

Tu je y_0 količina materije u $t = 0$, a $\lambda > 0$ konstanta ovisna o vrsti materije (može se i preciznije definirati), Slika 9.15. Ovaj ćemo važan primjer podrobnije razmatrati kad budemo obrađivali diferencijalne jednadžbe.



Slika 9.15: Primjer 9.7

□

9.2.5 Inverzne funkcije i rješavanje jednadžba

Ako f ima inverznu funkciju, onda jednadžba $f(x) = b$ ima jedinstveno rješenje $x = f^{-1}(b)$, uz uvjet da $f^{-1}(b)$ postoji. Dakle, takve jednadžbe imaju točno jedno rješenje ili nemaju rješenja.

Primjer 9.8. [Inverzne funkcije i rješavanje jednadžba]

(i) Jednadžba $x - 2 = 3$ ima rješenje $x = 3 + 2 = 5$

(ii) Jednadžba $2 \cdot x = 3$ ima rješenje $x = \frac{3}{2}$

(iii) Jednadžba $\frac{x}{2} = 3$ ima rješenje $x = 3 \cdot 2 = 6$

(iv) Jednadžba $x^2 = 3$ ima rješenje $x = \pm\sqrt{2}$ (predznak se pojavljuje jer su kvadriranje i korjenovanje inverzne samo za pozitivne brojeve)

(v) Jednadžba $2^x = 3$ ima rješenje $x = \log_2(3)$

(vi) Jednadžba $\log_2(x) = 3$ ima rješenje $x = 2^3 = 8$

(vii) Jednadžba $2^x = -3$ nema rješenje jer $\log_2(-3)$ ne postoji

(viii) Jednadžba $x^2 = -3$ nema realnih rješenja jer $\sqrt{-3}$ nije realan broj

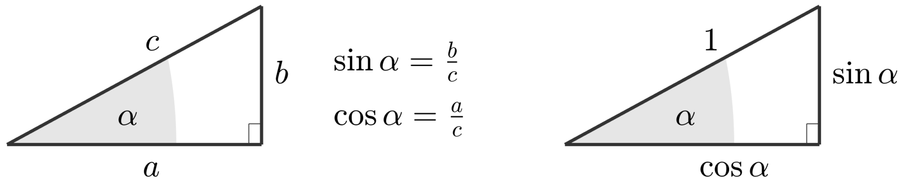
(ix) Jednadžba $x^3 = -2$ ima rješenje $x = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$

(x) Jednadžba $\log_2(x) = -3$ ima rješenje $x = 2^{-3} = \frac{1}{8}$. □

9.3 NOVE DEFINICIJE I TVRDNJE S PRIMJERIMA

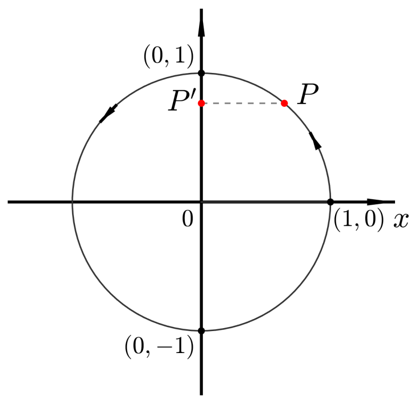
9.3.1 Trigonometrijske funkcije i arkus funkcije

Trigonometrijske funkcije obrađuju se u srednjoj školi. S njihovim inverzima - arkus funkcijama - susrećemo se prvi put.
Vidjeli smo da su linearne veze vrlo česte (na primjer, vrijeme i položaj čestice koja se giba jednoliko po pravcu), kvadratne također (na primjer, vrijeme i položaj čestice pri slobodnom padu). Eksponencijalne veze dobro opisuju radioaktivni raspad itd. Trigonometrijske funkcije opisuju periodna gibanja (titranja, valovi) i to je jedna od njihovih najvažnijih uloga.
Temelj za te funkcije jest poznavanje odnosa između kuta i stranica pravokutnog trokuta, posebice onog s hipotenuzom duljine 1, Slika 9.16.



Slika 9.16: Odnos između kuta i stranica pravokutnog trokuta

Primjer 9.9. [Jednoliko gibanje po kružnici]
Zamislimo da se čestica jednoliko giba po jediničnoj kružnici, suprotno od kazaljke na satu, jediničnom brzinom. Postavimo tu kružnicu u koordinatni sustav. Treba opisati položaj projekcije te točke na y-osi ovisno o vremenu t, Slika 9.9.

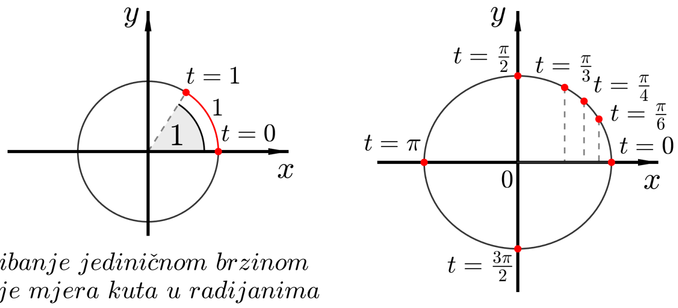


Slika 9.17: Primjer 9.9

Vidimo da projekcija P' točke P titra po y-osi između točaka $(0, -1)$ i $(0, 1)$, dok P kruži.
Položaj u nekom vremenu t ovisi o položaju u $t = 0$ i zato, kao najjednostavniju mogućnost, razmotrimo onu ako je početni položaj u točki $(1, 0)$, tj. na pozitivnom dijelu x-osi (Slika 9.18).
Kako je brzina jedinična, a opseg kružnice 2π, jedan okret traje 2π vremenskih jedinica (pola okreta π vremenskih jedinica, četvrtina okreta $\frac{\pi}{2}$ vremenskih jedinica itd.), položaj y povezan je s vremenom sinusnom vezom:

$$y = \sin t,$$

što vidimo i iz tablice.

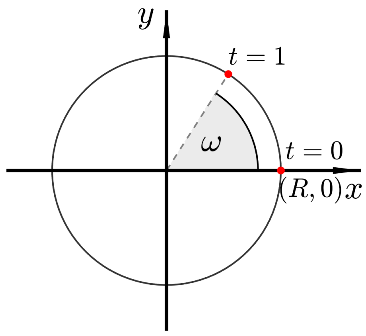


t	y
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

Slika 9.18: Primjer 9.9

□

Primjer 9.10. [Jednoliko gibanje po kružnici]
Zamislimo sad da se čestica jednoliko giba po kružnici polumjera R, suprotno od kazaljke na satu, kutnom brzinom ω u *radijanima* - to znači da ona u jedinici vremena prebriše središnji kut ω, Slika 9.19.



Slika 9.19: Primjer 9.10

Postavimo tu kružnicu u koordinatni sustav. Treba opisati:

(i) položaj projekcije te točke na y-osi ovisno o vremenu t

(ii) položaj projekcije te točke na x-osi ovisno o vremenu t

(iii) položaj te točke u koordinatnom sustavu ovisno o vremenu t.

Položaj ovisi o položaju u $t=0$. Zato, kao najjednostavniju mogućnost, razmotrimo onu ako je početni položaj u točki $(R,0)$, tj. na pozitivnom dijelu x-osi. Kako je kutna brzina ω, za t vremenskih jedinica prebriše se kut ωt, pa vrijedi (Slika 9.10):

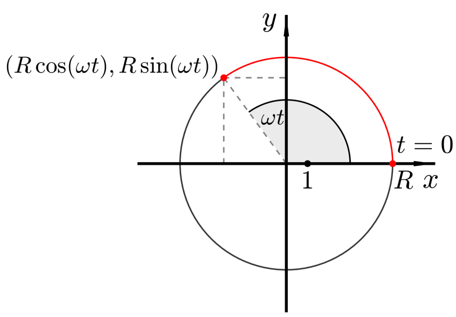
(i)
$$y = R\sin(\omega t)$$

(ii)
$$x = R\cos(\omega t)$$

(iii)
$$(x,y) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t)).$$

Posebice, ako je $R = 1$ i $\omega = 1$ duljinskih jedinica za jednu vremensku, onda je

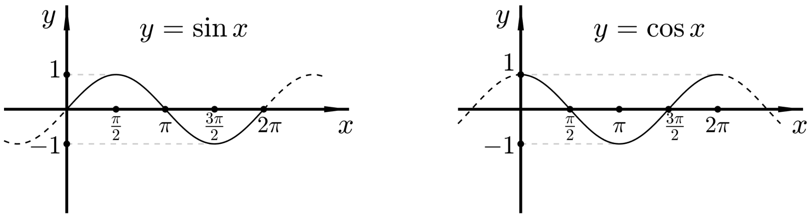
$$(x,y) = (\cos t, \sin t).$$



Slika 9.20: Primjer 9.10

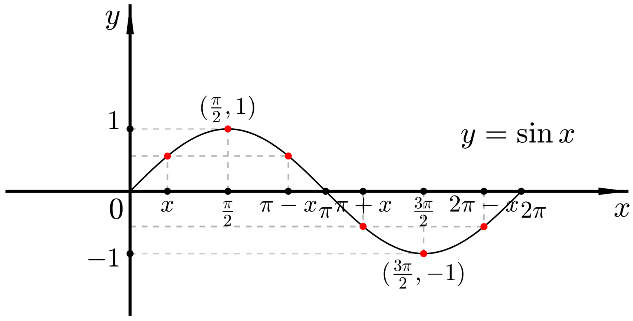
□

Kad crtamo grafove pripadnih funkcija **sinus** i **kosinus**, onda obično ne pišemo t, već x, a drugu koordinatu prema običaju označavamo kao y. Dakle, imamo funkcije sin i cos i njihove grafove $y = \sin x$ i $y = \cos x$, Slika 9.21.



Slika 9.21: Grafovi funkcija sinus i kosinus

Uočimo ponašanje funkcije sinus na intervalu $[0, 2\pi\rangle$, Slika 9.22:

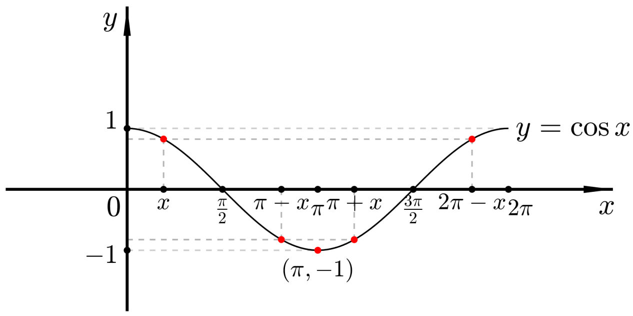


Slika 9.22: Graf funkcije sinus na intervalu $[0, 2\pi\rangle$

(i) Na tom intervalu sinus svaku *pozitivnu* vrijednost iz intervala $\langle -1, 1\rangle$ postigne točno dva puta: jednom u nekom x, a drugi put u $\pi - x$. Pripadna negativna vrijednost postiže se u $\pi + x$ i $2\pi - x$. Broj 1 postiže se jednom, u $x = \frac{\pi}{2}$, broj -1 također, u $x = \frac{3\pi}{2}$.

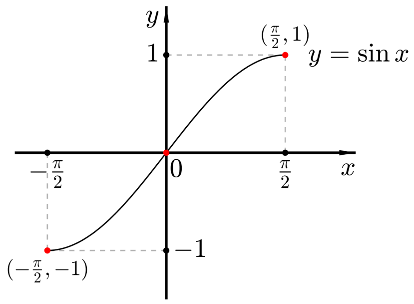
(ii) Sinus, po četvrtinama, najprije usporeno raste, pa ubrzano pada, pa usporeno pada, pa ubrzano raste. Na intervalu $[2\pi, 4\pi\rangle$ sinus se opet ponaša kao i na $[0, 2\pi\rangle$ itd. - **periodnost** s periodom 2π.

Slično je za funkciju kosinus, samo što su sad jednake vrijednosti u x i $2\pi - x$, odnosno u $\pi - x$ i $\pi + x$, Slika 9.23.



Slika 9.23: Graf funkcije kosinus na intervalu $[0, 2\pi\rangle$

Uočimo ovo svojstvo funkcije sinus: na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ funkcija sin postiže *svaku* vrijednost iz intervala $[-1, 1]$ *točno* jedan put (Slika 9.24).



Slika 9.24: Graf funkcije sinus na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

To znači da je na tom intervalu sinus injektivna funkcija i da ima inverznu funkciju: oznaka Sin^{-1} ili Arcsin (čitamo **arkus sinus**). Veliko S u Sin upozorava nas da ne gledamo funkciju za sve x, već samo za $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

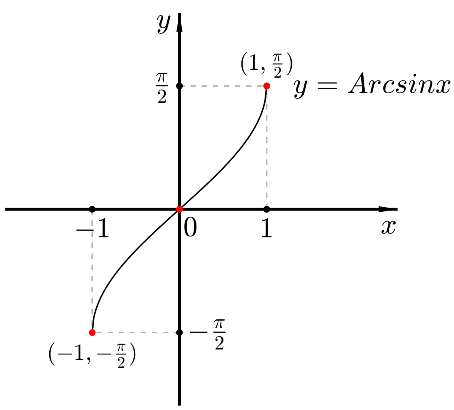
Dakle:

$$\mathrm{Sin} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$
$$\mathrm{Arcsin} := \mathrm{Sin}^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Osnovne formule koje povezuju sinus i arkus sinus kao međusobno inverzne funkcije:

$$\sin(\mathrm{Arcsin}(x)) = x \quad \text{za sve} \quad x \in [-1, 1]$$
$$\mathrm{Arcsin}(\sin(x)) = x \quad \text{za sve} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Graf funkcija Arcsin (Slika 9.25) i sinus (za $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$) simetrični su s obzirom na pravac $y = x$, ali nije ih zgodno crtati skupa.



Slika 9.25: Graf funkcije Arcsin

Primjer 9.11. [Određivanje vrijednosti funkcije Arcsin]
Odredimo $\mathrm{Arcsin}(1)$, $\mathrm{Arcsin}(-1)$, $\mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{2}$ i $\mathrm{Arcsin}(-\frac{\sqrt{3}}{2})$:

$$\text{Arcsin}\,(1) = \tfrac{\pi}{2} \text{ jer je } \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1$$
$$\text{Arcsin}\,(-1) = -\tfrac{\pi}{2} \text{ jer je } \sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) = -1$$
$$\text{Arcsin}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{\pi}{6} \text{ jer je } \sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \tfrac{1}{2}$$
$$\text{Arcsin}\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\tfrac{\pi}{3} \text{ jer je } \sin\left(-\tfrac{\pi}{3}\right) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

Uočimo da je ovdje bilo bitno da $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$ i $-\frac{\pi}{3}$ svi pripadaju intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. □

Primjer 9.12. [Rješavanje trigonometrijskih jednadžba]
Riješimo jednadžbu $\sin(x) = \frac{1}{2}$:

(a) na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tj. za $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(b) na intervalu $[0, 2\pi]$

(c) u skupu realnih brojeva (sva rješenja).

Kad riješimo (a), onda ćemo lako riješiti i (b) i (c).

(a) Rješenje je jedinstveno:
$$x_0 = \text{Arcsin}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{\pi}{6}.$$

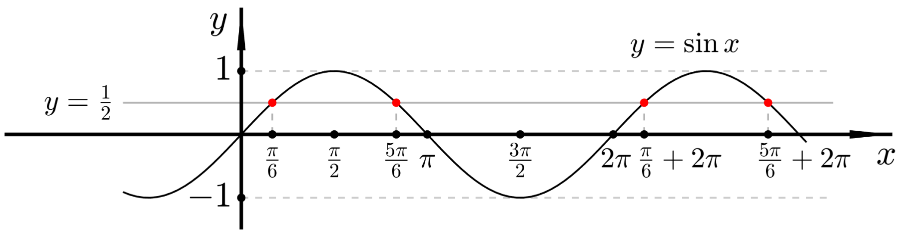
(b) Ima dva rješenja:
$$x_1 = x_0 = \tfrac{\pi}{6} \text{ (iz (a))}$$
$$x_2 = \pi - x_0 = \pi - \tfrac{\pi}{6} = \tfrac{5\pi}{6}.$$

(c) Imamo dvije beskonačne serije rješenja, a dobiju se, zbog periodnosti, dodavanjem $k \cdot 2\pi$, tj. $2k\pi$ svakom od rješenja iz (b). Tu k prolazi skupom cijelih brojeva: $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$:

I. serija $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

II. serija $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

Geometrijska ilustracija rješenja je na Slici 9.26.



Slika 9.26: Primjer 9.12

□

Primjer 9.13. [Rješavanje trigonometrijskih jednadžba]
Riješimo jednadžbu $\sin(x) = -\frac{1}{2}$:

(a) na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tj. za $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(b) na intervalu $[0, 2\pi]$

(c) u skupu realnih brojeva (sva rješenja).

Postupamo kao i u prethodnom primjeru. Postoji mala razlika u postupku (zbog negativnog predznaka):

(a) Rješenje je opet jedinstveno:

$x_0 = \text{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$. Napominjemo da je, zbog neparnosti, dovoljno znati računati arkussinus za pozitivne brojeve.

(b) Ima dva rješenja:

$x_1 = \pi - x_0 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

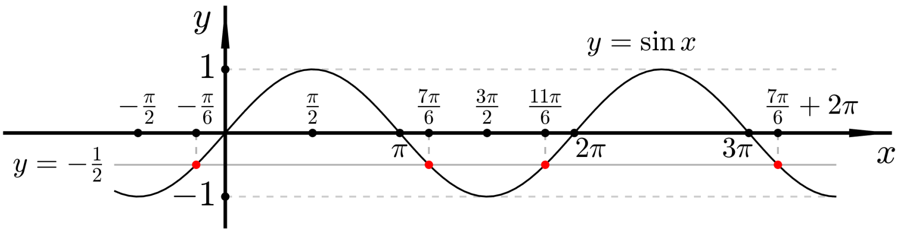
$x_2 = 2\pi + x_0 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.

(c) Kao i u prethodnom primjeru:

I. serija $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

II. serija $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$.

Geometrijska ilustracija rješenja je na Slici 9.27.

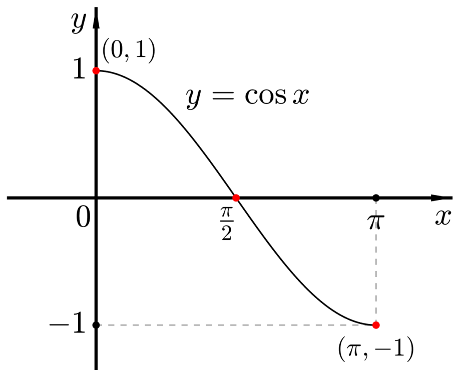


Slika 9.27: Primjer 9.13

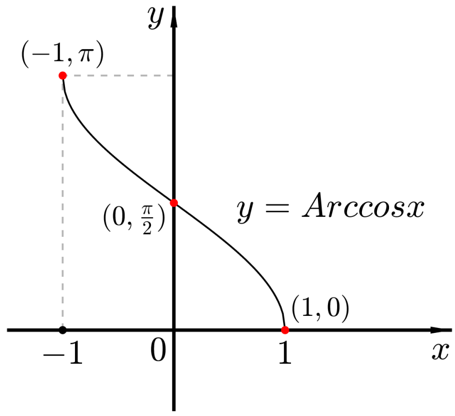
□

Za rješavanje jednadžbe $\cos(x) = b$, postupa se slično kao sa sinusom. Prvo, uvodi se inverzna funkcija Arccos ovako:

1. Vidimo da cos na intervalu $[0, \pi]$ postiže svaku vrijednost iz $[-1, 1]$, Slika 9.28, pa ima inverznu funkciju Arccos (Slika 9.29).



Slika 9.28: Graf funkcije kosinus na intervalu $[0, \pi]$



Slika 9.29: Graf funkcije Arccos

2. Postupamo kao kod sinusa, dakle:

$$\begin{aligned} \text{Cos} : [0, \pi] &\to [-1, 1] \\ \text{Arccos} := \text{Cos}^{-1} : [-1, 1] &\to [0, \pi]. \end{aligned}$$

Vrijede sljedeće veze između ovih dviju međusobno inverznih funkcija:

$$\begin{aligned} \text{Arccos}(\cos(x)) &= x \quad \text{za sve} \quad x \in [0, \pi] \\ \cos(\text{Arccos}(x)) &= x \quad \text{za sve} \quad x \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Primjer 9.14. [Rješavanje trigonometrijskih jednadžba]
Riješimo jednadžbu $\cos(x) = \frac{1}{2}$.

1. korak. Rješenje na intervalu $[0, \pi]$:

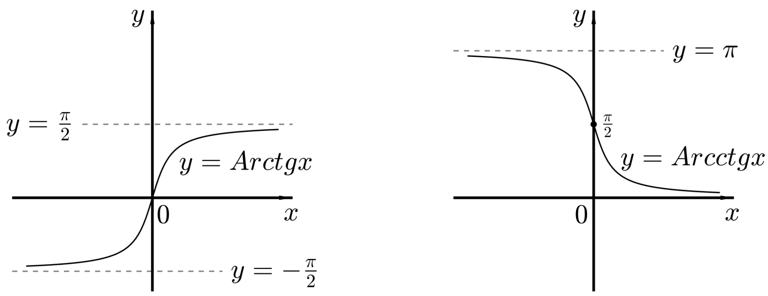
$$x_0 = \text{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

2. korak. Skup svih rješenja:

$$x = \pm x_0 + 2k\pi = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

Tu smo iskoristili parnost funkcije kosinus pa nismo morali tražiti drugo rješenje na intervalu $[0, 2\pi]$. □

Funkcije Arctg i Arcctg uvodimo Slikom 9.30.



Slika 9.30: Grafovi funkcija Arctg i Arcctg

One su inverzne funkcije funkcije $\mathrm{tg}(x)$ za $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, odnosno $\mathrm{ctg}(x)$ za $0 < x < \pi$.

Analogno kao za sin i cos, vrijedi:

$$\begin{aligned} \mathrm{Arctg}(\mathrm{tg}(x)) &= x \text{ za sve } x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \\ \mathrm{tg}(\mathrm{Arctg}(x)) &= x \text{ za sve } x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Arcctg}(\mathrm{ctg}(x)) &= x \text{ za sve } x \in \langle 0, \pi \rangle \\ \mathrm{ctg}(\mathrm{Arcctg}(x)) &= x \text{ za sve } x. \end{aligned}$$

9.4 PRIMJENA MATLAB-A

9.4.1 Popis naredaba za matematičke funkcije. Naredbe `power`, `sqrt`, `nthroot`, `exp`, `log`, `log2`, `log10`, `sin`, `cos`, `tan`, `cot`, `asin`, `acos`, `atan` i `acot`

Dajemo pregled naredaba za elementarne funkcije:

funkcija	naredba	funkcija	naredba
x^n	`power(x, n)` ili `x^n`	$\sin(x)$	`sin(x)`
$\sqrt{x}$	`sqrt(x)`	$\cos(x)$	`cos(x)`
$\sqrt[n]{x}$	`nthroot(x, n)`	$\mathrm{tg}(x)$	`tan(x)`
a^x	`a^x`	$\mathrm{ctg}(x)$	`cot(x)`
e^x	`exp(x)`	$\mathrm{Arcsin}(x)$	`asin(x)`
$\log_{10}(x)$	`log10(x)`	$\mathrm{Arccos}(x)$	`acos(x)`
$\log_2(x)$	`log2(x)`	$\mathrm{Arctg}(x)$	`atan(x)`
$\ln(x)$	`log(x)`	$\mathrm{Arcctg}(x)$	`acot(x)`

Tablica 9.1: Popis MATLAB naredaba za elementarne funkcije

Primijetimo da nema naredbe za logaritamsku funkciju $f(x) = \log_a(x)$ s općenitom bazom a. Tu se možemo snaći tako da, korištenjem formule

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)},$$

gdje je b proizvoljna baza, zadamo funkciju f pomoću nekog od logaritama iz Tablice 9.1. Na primjer, funkciju $f(x) = \log_3(x)$ možemo zadati na bilo koji od sljedeća tri načina:

```
syms x
f1(x) = log(x)/log(3)
f2(x) = log2(x)/log2(3)
f3(x) = log10(x)/log10(3)
```

9.4.2 Inverzna funkcija. Naredba `finverse`

Kako bismo u funkciju mogli razmatrati u paru s njenom inverznom funkcijom, koristit ćemo simboličko zadavanje funkcija. Tako, pomoću naredbe `finverse`, možemo odrediti inverznu funkciju zadane funkcije. Na primjer:

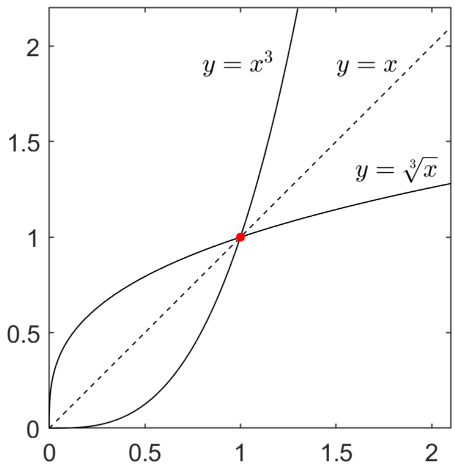
```
syms x
f(x) = x^3
invf(x) = finverse(f)                                    % x^(1/3)
```

Funkcija `x^(1/3)` koju smo dobili naredbom `finverse` jednaka je funkciji $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ realnog trećeg korijena samo za nenegativne x, dok za negativne x ta funkcija u MATLAB-u daje ima kompleksne vrijednosti. Pokažimo to primjerom, uz korištenje `double` za pretvaranje simboličkog izraza u numerički:

```
nthroot(8, 3)                                           % 2
```

Stoga je `invf` inverzna funkciji `f` samo za $x \geqslant 0$. U istom koordinatnom sustavu prikazujemo grafove obiju funkcija za $x \geqslant 0$, kao i pravac $y = x$ s obzirom na kojeg su oni simetrični. Kako bismo dobili prikaz koji ima iste duljine za jedinične oznake koordinatnih osi, koristimo `axis` s argumentom `equal`. Također, istaknuli smo točku $(1, 1)$ u kojoj se mijenja odnos između grafa funkcije f i njoj inverzne funkcije:

```
fplot(f, [0, 1.3], 'k'); hold on
fplot(invf, [0, 2.1], 'k')
fplot(x, [0, 2.1], 'k--')
plot(1, 1, 'r.', 'MarkerSize', 12)
text(0.8, 1.9, '$y = x^3$', 'interpreter', 'latex')
text(1.6, 1.35, '$y = \sqrt[3]{x}$', 'interpreter', 'latex')
text(1.5, 1.9, '$y = x$', 'interpreter', 'latex')
axis equal
ax = gca
ax.XAxisLocation = 'origin'; ax.YAxisLocation = 'origin'
```



Da smo htjeli grafički prikazati funkcije $f(x) = x^3$ i $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ i za negativne vrijednosti argumenta, mogli smo za funkciju f^{-1} koristiti naredbu `nthroot(x, n)` za n-ti korijen, koja uvijek ima realne vrijednosti:

- kod neparnih korijena za sve vrijednosti argumenta:

```
nthroot(8, 3)                                    % 2
nthroot(-8, 3)                                   % -2
```

- kod parnih korijena samo za nenegativne vrijednosti argumenta, dok za negativne vrijednosti nije definirana:

```
nthroot(16, 4)                                   % 2
nthroot(-16, 4)
```

```
    Error using nthroot
    If X is negative, N must be an odd integer.
```

9.4.3 Kompozicija funkcija. Naredba `compose`

Za kompoziciju funkcija koristimo naredbu `compose`, kao u primjeru:

```
syms x
f(x) = exp(x)
g(x) = sin(x)
compose(f, g)                                    % exp(sin(x))
compose(g, f)                                    % sin(exp(x))
```

Pogledajmo kompoziciju funkcije i njoj inverzne funkcije iz 9.4.2. Kako smo pokazali da su te funkcije međusobno inverzne samo za nenegativne realne brojeve, koristimo naredbu `assume` za postavljanje uvjeta na simboličku varijablu:

```
syms x
f(x) = x^3
invf(x) = finverse(f)                            % x^(1/3)
compose(f, invf)                                 % x
assume(x >= 0)
compose(invf, f)                                 % x
```

Vidimo da obje kompozicije daju x, što smo i očekivali.
Sličan uvjet moramo postaviti i kod funkcija $f(x) = \sin(x)$ i $f^{-1}(x) = \text{Arcsin}(x)$:

```
syms x
compose(sin(x), asin(x))                         % x
assume(-pi/2 < x < pi/2)
compose(asin(x), sin(x))                         % x
```

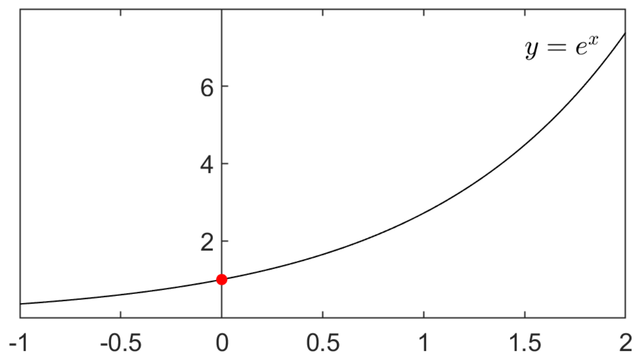
9.4.4 Zapis funkcijske veze među veličinama

Često ne definiramo zasebnu funkciju već navodimo analitički izraz kojim se zadaje *funkcijska veza* $y = f(x)$ između argumenta x i zavisne varijable y:

```
x = 2
y = exp(x)                                              % 7.3891
```

Za crtanje krivulje $y = f(x)$ najprije zadajemo vektor vrijednosti argumenta, a potom koristimo naredbu `plot`. Pokažimo to na primjeru veze $y = e^x$:

```
x = linspace(-1, 2)
y = exp(x)
plot(x, y, 'k'); hold on
plot(0, 1, 'r.', 'MarkerSize', 14)
text(1.5, 7, '$y = e^x$', 'interpreter', 'latex')
ax = gca
ax.XAxisLocation = 'origin'
ax.YAxisLocation = 'origin'
```



Za linearnu funkciju, kvadratnu funkciju i polinome višeg stupnja vezu $y = f(x)$ možemo zadati i pomoću vektora koeficijenata funkcije. Na primjer, za kvadratnu vezu $y = x^2 + 2x + 3$ najprije definiramo vektor koeficijenata `[1 2 3]`, a potom pomoću `polyval` računamo vrijednost zavisne veličine y:

```
koeficijenti =  [1 2 3]
x = 5
y = polyval(koeficijenti, x)                                 % 38
```

Ovaj način zadavanja polinoma pogodan je i zbog naredbe `roots` koja računa korijene polinoma:

```
korijeni = roots(koeficijenti)
```

```
korijeni =
  -1.0000 + 1.4142i
  -1.0000 - 1.4142i
```

Ukoliko korijene želimo zapisati simbolički, koristimo naredbu `sym`:

```
simkorijeni = sym(korijeni)
```

```
simkorijeni =
  - 1 + 2^(1/2)*1i
  - 1 - 2^(1/2)*1i
```

Naredba `poly` na neki je način inverzna naredbi `roots`. Naime, ta naredba iz poznatih korijena daje vektor koeficijenata polinoma koji ima te korijene, a vodeći mu je koeficijent 1:

```
koeficijenti = poly(korijeni)     % [1.0000  2.0000  3.0000]
```

9.4.5 Zadavanje vektora vrijednosti varijable. Naredba `linspace`

Za zadavanje diskretnog skupa vrijednosti neke varijable i računanje vrijednosti njoj zavisne varijable, možemo postupiti kao u primjeru:

```
x = [-1 4 6 15]
y = polyval([1 2 3], x)                       % [2 27 51 258]
```

Za ekvidistantan skup vrijednosti, naročito za duge liste, možemo koristiti naredbu `linspace(a, b, n)`, gdje broj komponenata vektora vrijednosti zadajemo argumentom `n`. Na primjer:

```
x = linspace(0, 1, 8)
```

```
x = 0  0.1429  0.2857  0.4286  0.5714  0.7143  0.8571  1.0000
```

Vektor vrijednosti možemo zadati i s `[a:k:b]`, gdje je `k` "korak" kojim prelazimo interval `[a, b]`: ako želimo n točaka, onda k određujemo prema formuli $k = \frac{b-a}{n-1}$. Tako sljedeća naredba daje isti rezultat kao što ga je dala gornja upotreba `linspace`:

```
x = [0:1/7:1]
```

```
x = 0  0.1429  0.2857  0.4286  0.5714  0.7143  0.8571  1.0000
```

Određivanje vrijednosti zavisne varijable sada radimo kao i prije. Na primjer, za polinom iz 9.4.4 imamo:

```
y = polyval([1 2 3], x)
```

```
y = 3.0000 3.3061 3.6531 4.0408 4.4694 4.9388 5.4490 6.0000
```

Ako želimo dizajnirati jednostavnu tablicu tako da u jednom retku budu vrijednosti od x, a ispod odgovarajuće vrijednosti od y, onda možemo postupiti ovako:

```
x = linspace(0, 1, 8)
y = polyval([1 2 3], x)
tablica = [x; y]
```

```
tablica =
     0  0.1429  0.2857  0.4286  0.5714  0.7143  0.8571  1.0000
3.0000  3.3061  3.6531  4.0408  4.4694  4.9388  5.4490  6.0000
```

9.5 PITANJA I ZADATCI

1. Nađite što više primjera linearne veze među veličinama u matematici, fizici, kemiji i sl.
2. Opišite graf funkcije $f(x) = ax^2$. Navedite koja svojstva ovise o parametru a, a koja ne ovise.
3. Opišite graf kvadratne funkcije ovisno o parametrima.
4. (i) Usporedite svojstva eksponencijalnih funkcija s bazom većom od 1, odnosno manjom od 1. Koja su svojstva zajednička, a koja različita i kako?
   (ii) Usporedite svojstva logaritamskih funkcija s bazom većom od 1, odnosno manjom od 1. Koja su svojstva zajednička, a koja različita i kako?
5. (i) Napišite formulu koja povezuje eksponencijalne funkcije s različitim bazama, tj. napišite a^x pomoću baze b. Posebno, zapišite a^x pomoću baze e.
   (ii) Napišite formulu koja povezuje logaritamske funkcije s različitim bazama. Posebno, zapišite $\log_a(x)$ pomoću ln, odnosno log.
6. Grafički riješite jednadžbe iz Primjera 9.8. Obrazložite zašto neke nemaju rješenja.
7. Usporedite grafove funkcija Sin i Arcsin s obzirom na karakter rasta. Slično postupite za funkcije Cos i Arccos.
8. Riješite jednadžbe $\sin(x) = 0$, $\sin(x) = 1$ i $\sin(x) = -1$ prema uzoru na Primjere 9.12 i 9.13. Uočite sličnosti i razlike. Interpretirajte i geometrijski.
9. Riješite jednadžbe $\cos(x) = 0$, $\cos(x) = 1$ i $\cos(x) = -1$ prema uzoru na Primjer 9.14. Uočite sličnosti i razlike. Interpretirajte i geometrijski.

10 POJAM DERIVACIJE, GEOMETRIJSKO I FIZIKALNO ZNAČENJE

U lekciji se uvodi pojam prirasta funkcije, brzine prirasta, derivacije funkcije i veze s tangentom grafa funkcije te brzinom čestice koja se giba po pravcu. Upućuje se na važnost pojma derivacije u inženjerstvu.

10.1 PRIPADNI PROBLEM

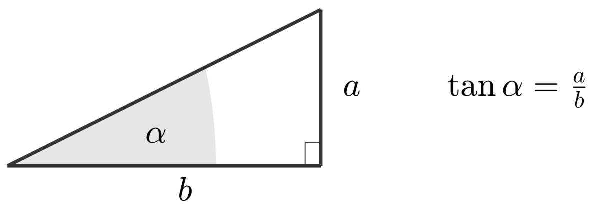
Problem opisa brzine neke reakcije ili, općenito, brzine promjene jedne veličine s obzirom na promjenu druge veličine, jedan je od temeljnih inženjerskih problema. Taj problem analogan je problemu opisa brzine čestice koja se giba po pravcu. Geometrijski, taj je problem analogan problemu određivanja tangente na graf funkcije. Svi se ti problemi matematički rješavaju pomoću pojma derivacije funkcije.

Nadalje, pomoću derivacije se opisuje promjena brzine reakcije (ubrzanje, usporenje i sl.) te djelomice analogni geometrijski pojmovi (konveksnost, konkavnost i sl.).

10.2 POTREBNO PREDZNANJE

Intuitivna predodžba brzine, posebice brzine čestice koja se giba po pravcu te tangente na krivulju usvaja se već od sedmog razreda osnovne škole (pa i od ranije). Na tim predodžbama uvest ćemo matematički pojam brzine i derivacije funkcije.

Za usvajanje pojma derivacije potrebno je i predznanje o osnovnim elementarnim funkcijama. Također, potrebno je znati definiciju tangensa kuta (Slika 10.1).



Slika 10.1: Tangens kuta

10.3 NOVE DEFINICIJE I TVRDNJE S PRIMJERIMA

10.3.1 Pojam prirasta neke veličine, prirasta argumenta funkcije i prirasta funkcije

I. Prirast veličine

Vrijednosti neke veličine u pravilu se mijenjaju (ukoliko veličina nije konstantna). Ako uočimo dvije vrijednosti x_1 i x_2 neke veličine x, onda se razlika $x_2 - x_1$ zove **prirast veličine** x. Vidimo da smo tu x_1 shvatili kao prvu vrijednost (možemo zamisliti da smo je dobili pri prvom mjerenju veličine x, odnosno da je ona, prema nekom načelu, prva), a x_2 kao drugu (možemo zamisliti da smo je dobili pri drugom mjerenju veličine x, odnosno da je ona, prema nekom načelu, druga). To pišemo i kao

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

Vidimo da Δx označava koliko se promijenila veličina x. Ta se relacija može zapisati i ovako:

$$x_2 = x_1 + \Delta x,$$

što se može zamišljati kao da se nova vrijednost veličine dobije tako da se staroj vrijednosti doda prirast.

II. Prirast argumenta i prirast funkcije

Uz svaku funkciju povezane su dvije veličine:

1. veličina - *argument funkcije* ili *nezavisna varijabla* koja se obično označava s x

2. veličina - *zavisna varijabla* - to je veličina vrijednosti funkcije, a obično se označava s y.

Na primjer, za funkciju $f(x) := x^2$:

- argument (nezavisna varijabla) je x i ona može imati bilo koju realnu vrijednost
- zavisna varijabla y povezana je s x vezom $y = x^2$ i ona postiže svaku realnu vrijednost koja je veća ili jednaka nuli.

Prirast argumenta je *bilo koja* vrijednost $\Delta x = x_2 - x_1$, gdje su x_1 i x_2 dvije izabrane vrijednosti veličine x. Preciznije: Δx je prirast veličine x kad se ona promijeni od $x = x_1$ do $x = x_2$.

Prirast funkcije u x_1 uvijek je povezan s pripadnim prirastom argumenta. Označava se kao $\Delta f(x)|_{x=x_1}$ i definira kao

$$\Delta f(x)|_{x=x_1} := f(x_2) - f(x_1).$$

To je prirast funkcije f kad se argument x promijeni od $x = x_1$ do $x = x_2$. Oznaka $\Delta f(x)|_{x=x_1}$ obično se piše jednostavnije kao $\Delta f(x)$.

Primjer 10.1. [Prirast funkcije]
Odredimo prirast funkcije $f(x) := x^2$:

(i) kad se x promijeni od $x = 1$ do $x = 2$

(ii) kad se x promijeni od $x = 10$ do $x = 11$

(iii) kad se x promijeni od $x = 100$ do $x = 101$.

(i) $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1) = f(2) - f(1) = 2^2 - 1^2 = 3$

(ii) $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1) = f(11) - f(10) = 11^2 - 10^2 = 21$

(iii) $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1) = f(101) - f(100) = 101^2 - 100^2 = 201$. □

Prirast funkcije često se shvaća i zapisuje kao prirast zavisne varijable y. Dakle: $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = \Delta f(x)$.

Treba usvojiti i ovu terminologiju:

x_0 neka početna vrijednost argumenta

Δx prirast argumenta u x_0

$x_0 + \Delta x$ nova vrijednost argumenta

$\Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ prirast funkcije f u x_0 za prirast argumenta Δx. Može se pisati i Δy umjesto $\Delta f(x)$, ako razmatramo veličinu y koja je s veličinom x povezana vezom $y = f(x)$.

Također, umjesto konkretne vrijednosti x_0, često se piše x pa oznake ostaju iste osim što se svugdje x_0 zamijeni s x. Na primjer:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Primjer 10.2. [Prirast funkcije]
Zapišimo prirast kvadratne funkcije u x. Tu je $f(x) := x^2$. Zato je prirast u x jednak

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2.$$

Nakon računanja dobije se

$$\Delta f(x) = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

To se može pisati kao:

$$\Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2,$$

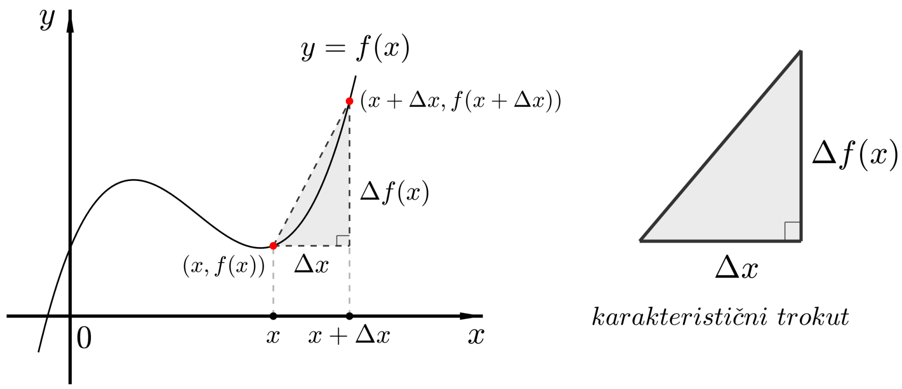
gdje je y veličina povezana s x vezom $y = x^2$. □

Vidimo da je prirast funkcije ovisan o:

- početnoj vrijednosti argumenta (općenito x)

- prirastu argumenta (općenito Δx).

Geometrijska predodžba prirasta funkcije i prirasta argumenta: na grafu funkcije prirast funkcije i prirast argumenta (ako su oba pozitivna) mogu se predočiti kao *katete* pravokutnog **karakterističnog trokuta** (Slika 10.2).



Slika 10.2: Karakteristični trokut

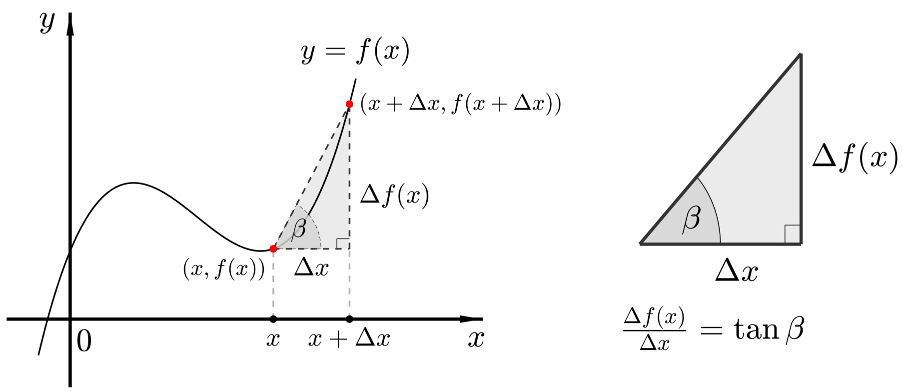
10.3.2 Relativni prirast funkcije, prosječna brzina promjene

U Primjeru 10.1 stalno je bilo $\Delta x = 1$ dok je početna vrijednost bila, redom, $x = 1$, $x = 10$, $x = 11$. Vidimo da za iste promjene argumenta imamo različite promjene funkcije, ovisno o početnoj vrijednosti.

Općenito, **relativni prirast funkcije** s obzirom na promjenu argumenta je omjer prirasta funkcije i prirasta argumenta:

$$\text{Relativni prirast} := \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Geometrijska predodžba relativnog prirasta: tangens kuta karakterističnog trokuta (Slika 10.3).



Slika 10.3: Tangens kuta karakterističnog trokuta

Vidimo da se relativni prirast definira poput prosječne (srednje) brzine, zato se naziva i **prosječna brzina promjene funkcije**.

Primjer 10.3. [Relativni prirast funkcije]
Odredimo relativni prirast, tj. prosječnu brzinu promjene kvadratne funkcije. Iz Primjera 10.2 dobijemo:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

U posljednjoj smo jednakosti pretpostavili da je $\Delta x \neq 0$, što je prirodno (i od sad ćemo uvijek smatrati da je $\Delta x \neq 0$).
Vidimo da za $f(x) := x^2$ vrijedi:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx 2x, \text{ ako je } \Delta x \approx 0$$

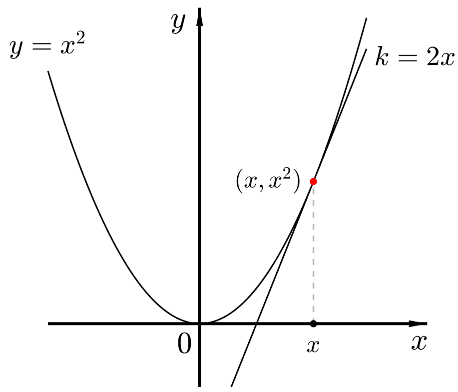
i da je ova približna jednakost to točnija što je prirast argumenta manji po apsolutnoj vrijednosti. □

10.3.3 Brzina promjene funkcije, derivacija funkcije u točki

Primjer 10.4. [Brzina promjene funkcije]
Razmotrimo prosječnu brzinu promjene kvadratne funkcije $f(x) = x^2$ za fiksiranu početnu vrijednost x, a za priraste Δx koji se približavaju prema nuli. Iz Primjera 10.3 vidimo da se ta vrijednost približava prema $2x$, što pišemo kao:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Čitamo: *limes kad delta iks ide u nulu od ....*
Geometrijski, to znači da je koeficijent smjera tangente na graf parabole $y = x^2$ u točki (x, x^2) jednak $2x$, Slika 10.4.



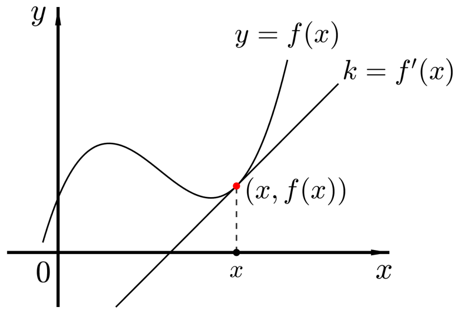
Slika 10.4: Tangenta na graf funkcije $f(x) = x^2$ u točki (x, x^2)

□

Vrijednost $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ zove se **derivacija** funkcije f u x, označava se kao $f'(x)$, a značenje joj je **brzina promjene funkcije** f u x. Dakle:

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

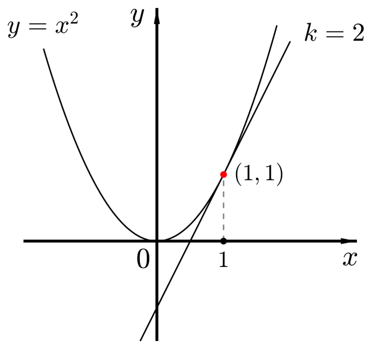
Geometrijsko značenje derivacije funkcije u točki je koeficijent smjera tangente na graf funkcije (Slika 10.5).



Slika 10.5: Derivacija kao koeficijent smjera tangente

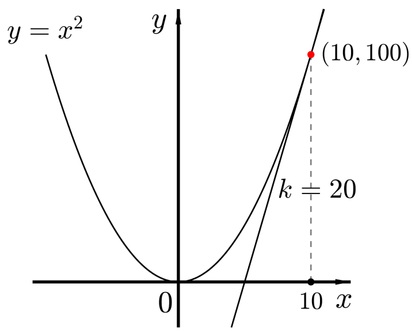
Primjer 10.5. [Brzina promjene funkcije]
Odredimo brzinu promjene i interpretirajmo je geometrijski, za funkciju $f(x) := x^2$ redom u $x = 1$, $x = 10$ i $x = 100$.

(i) $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$. Geometrijski, to znači da je $k = 2$ koeficijent smjera tangente na graf funkcije f, tj. na parabolu $y = x^2$ u točki $(1, f(1))$, odnosno u točki $(1, 1)$, Slika 10.6.



Slika 10.6: Primjer 10.5 (i)

(ii) $f'(10) = 2 \cdot 10 = 20$. Geometrijski, to znači da je $k = 20$ koeficijent smjera tangente na graf funkcije f, tj. na parabolu $y = x^2$ u točki $(10, f(10))$, odnosno u točki $(10, 100)$, Slika 10.7.



Slika 10.7: Primjer 10.5 (ii)

(iii) $f'(100) = 2 \cdot 100 = 200$. Geometrijski, to znači da je $k = 200$ koeficijent smjera tangente na graf funkcije f, tj. na parabolu $y = x^2$ u točki $(100, f(100))$, odnosno u točki $(100, 10000)$, što nije lako predočiti. □

10.3.4 Definicija derivacije funkcije u točki

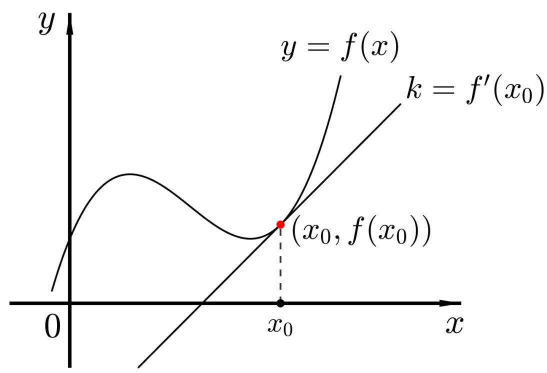
Često u definiciji derivacije umjesto x pišemo x_0 da bismo naglasili da se derivacija računa *u konkretnom broju*, tj. konkretnoj točki. Takav je pristup, vidjet ćemo, potreban kad želimo napisati jednadžbu tangente na graf.

Neka je f funkcija definirana oko točke (broja) x_0. **Derivacija funkcije** f **u** x_0 je *broj*

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Analiziramo gornji izraz, u kojem se lijeva strana definira pomoću desne. Na desnoj strani x_0 je stalan (fiksiran), a Δx se mijenja i teži prema nuli. Konačni izraz *ne ovisi* o Δx već samo o x_0 i funkciji f, upravo kao i lijeva strana.
Napomenimo da limes na desnoj strani ne mora postojati pa se može dogoditi da funkcija u nekoj točki *nema* derivaciju. U ovim lekcijama razmatramo samo elementarne funkcije i funkcije koje su pomoću njih izgrađene. Kod njih će taj limes, a onda i derivacija, postojati (osim u nekim izuzecima koji će se u konkretnim slučajevima moći detektirati).
Precizne formulacije geometrijskog i fizikalnog značenja derivacije funkcije u točki:

Geometrijsko značenje : derivacija funkcije f u x_0 je koeficijent smjera tangente na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$, Slika 10.8.



Slika 10.8: Geometrijska interpretacija derivacije funkcije u točki

Uočimo da se tu riječ *točka* spominje dvaput: prvi put to znači broj, a drugi put to je zaista točka u ravnini (uređeni par).

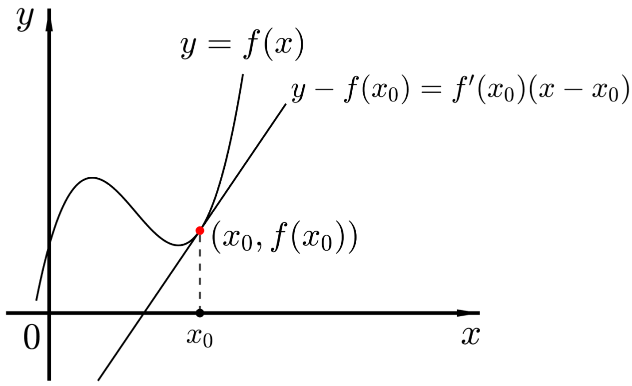
Fizikalno značenje : derivacija funkcije f u x_0 je brzina promjene funkcije f u x_0. Uočimo da je brzina tu uvedeni apstraktni pojam kao granična vrijednost (limes) prosječnih brzina kad prirast teži nuli - to je definicija brzine u zadanom trenutku, tj. trenutne brzine i nju ne možemo mjeriti.

10.3.5 Jednadžba tangente na graf funkcije

Jednadžba tangente na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$, Slika 10.9:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Vidimo da bi tu nastala zbrka da smo točku grafa označili kao (x, y) jer su x i y potrebne kao oznake u jednadžbi tangente.



Slika 10.9: Jednadžba tangente na graf funkcije

Primjer 10.6. [Jednadžba tangente]
Odredimo jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) := x^2$ u točki:

(i) $(1, 1)$

(ii) $(10, 100)$

(iii) $(100, 10000)$.

Koristimo Primjer 10.5:

(i) Tu je $x_0 = 1$, $f(x_0) = 1$, $f'(x_0) = 2$ pa je jednadžba tangente jednaka
$$y - 1 = 2(x - 1)$$

(ii) $y - 100 = 20(x - 10)$

(iii) $y - 10000 = 200(x - 100)$. □

10.3.6 Definicija derivacije funkcije

Derivacija funkcije f je *funkcija* f' kojoj je vrijednost u svakoj točki jednaka derivaciji funkcije f u toj točki. Uočimo da smo tu rekli samo *derivacija funkcije*, a da smo u prijašnjoj definiciji imali *derivacija funkcije u točki*. Dakle:

> Derivacija funkcije je nova funkcija, a derivacija funkcije u točki je broj.

Primjer 10.7. [Derivacija funkcije]
Odredimo derivaciju funkcije $f(x) := x^2$. To je funkcija $f'(x) := 2x$, što skraćeno možemo zapisati i kao

$$(x^2)' = 2x.$$

□

Izraz za derivaciju funkcije dobije se tako da se u izrazu za derivaciju funkcije u točki, umjesto x_0, uvrsti x:

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

10.4 PRIMJENA MATLAB-A

10.4.1 Prirast i relativni prirast funkcije u točki

Za funkciju $f(x) = x^2$ pokazujemo računanje prirasta (Primjer 10.2) i relativnog prirasta (Primjer 10.3) u točki, uz zadani prirast argumenta.

Najprije računamo opći izraz za prirast te vrijednost prirasta za $x = 1$ i $\Delta x = 1$:

```
syms x deltx
f(x) = x^2
deltf(x, deltx) = f(x + deltx) - f(x)  % (deltx + x)^2 - x^2
deltf(1, 1)                                                % 3
```

Ukoliko želimo pojednostaviti dobiveni izraz za prirast, koristimo `simplify`:

```
simplify(deltf)                        % deltx*(deltx + 2*x)
```

Dalje, računamo izraz za relativni prirast te vrijednost relativnog prirasta za $x = 1$, $\Delta x = 1$:

```
rel(x, deltx) = deltf / deltx  % ((deltx + x)^2 - x^2)/deltx
simplify(rel)                                   % deltx + 2*x
rel(1, 1)                                                 % 3
```

10.4.2 Računanje limesa funkcije. Naredba `limit`

Za računanje limesa $\lim_{x\to a} f(x)$ koristimo naredbu `limit(f, x, a)`. Tu naredbu ilustriramo na očekivanom rezultatu za derivaciju iz Primjera 10.4 kad limes relativnog prirasta iz 10.4.1 ide u nulu:

```
Df(x) = limit(rel, deltx, 0)                              % 2*x
```

Izračunajmo značajne limese koji će u sljedećoj lekciji biti bitni za određivanje derivacija eksponencijalne funkcije i trigonometrijskih funkcija:

```
syms x
limit(sin(x)/x, x, 0)                                       % 1
limit((exp(x) - 1)/x, x, 0)                                 % 1
```

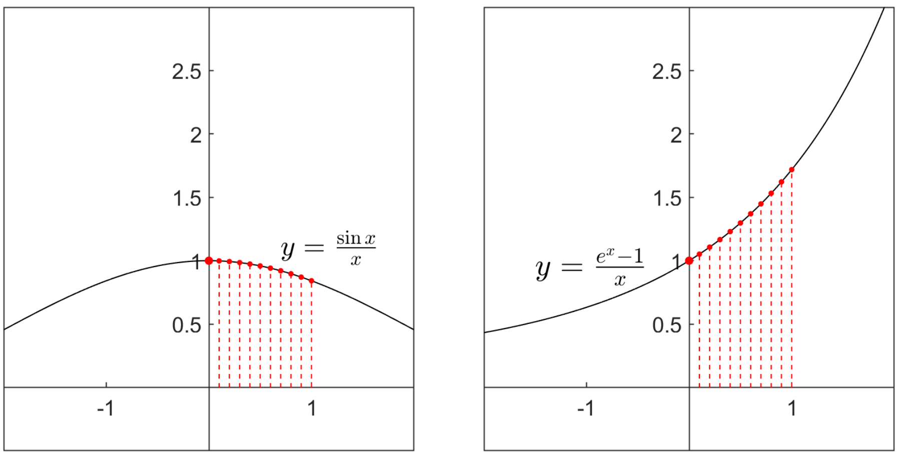
Kako bismo bolje dočarali vrijednosti koje postižu izrazi unutar tih limesa, napravimo tablicu koja u prvom retku ima vrijednosti varijable x koje se sve više približavaju k nuli, a u drugom i trećem retku vrijednosti izraza $\frac{\sin x}{x}$ i $\frac{e^x-1}{x}$, redom:

```
tablica = zeros(3, 10)
for i = 1:-0.1:0.1
    j = fix(11 - 10*i)
    tablica(1, j) = i
    tablica(2, j) = sin(i)/i
    tablica(3, j) = (exp(i) - 1)/i
end
```

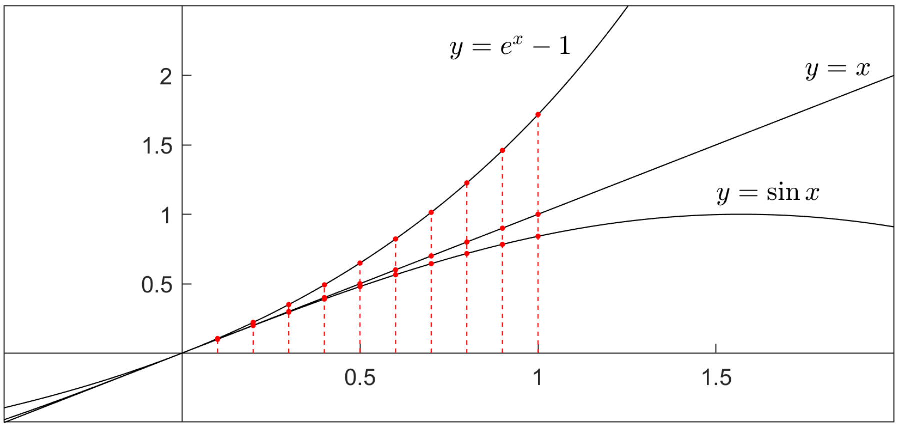
Vidimo da su, kako vrijednosti u prvom retku idu prema nuli, vrijednosti u drugom i trećem retku sve bliže jedinici:

```
tablica =
 1.0000  0.9000  0.8000  ...  0.4000  0.3000  0.2000  0.1000
 0.8415  0.8704  0.8967  ...  0.9735  0.9851  0.9933  0.9983
 1.7183  1.6218  1.5319  ...  1.2296  1.1662  1.1070  1.0517
```

Crtanjem krivulja $y = \frac{\sin x}{x}$ i $y = \frac{e^x-1}{x}$ uvjeravamo se da se vrijednosti tih funkcija približavaju jedinici kako x ide prema nuli:



Jednakosti $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ i $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ mogu se shvatiti i tako da su funkcije $\sin x$, odnosno $e^x - 1$ sve bliže x, kako se x približava nuli. To zorno pokazuju i slike:



U slučaju kada limes postoji samo s jedne strane, treba navesti s koje strane ga računamo. Na primjer, funkcija $f(x) = \ln x$ nije definirana za negativne brojeve pa ne postoji limes u nuli za negativne vrijednosti, ali ga možemo računati za pozitivne (iako je rezultat $-\infty$). U tom slučaju treba koristiti argument `'left'` ili `'right'` koji određuje stranu za koju računamo limes:

```
syms x
limit(log(x), x, 0)                                  % NaN
limit(log(x), x, 0, 'right')                         % -Inf
```

Slično je s limesima kod kojih se rezultat razlikuje ovisno o tome s koje strane ga računamo:

```
limit(1/x, x, 0)                                     % NaN
limit(1/x, x, 0, 'left')                             % -Inf
limit(1/x, x, 0, 'right')                            % Inf
```

10.5 PITANJA I ZADATCI

1. Odredite na dva decimalna mjesta prirast funkcije $f(x) := \sqrt{x}$:
   (i) ako se x promijeni od $x = 1$ do $x = 2$
   (ii) ako se x promijeni od $x = 10$ do $x = 11$
   (iii) ako se x promijeni od $x = 100$ do $x = 101$.
   Uputa: postupite analogno kao u Primjeru 10.1.
2. Usporedite rezultate Primjera 10.1 i Zadatka 1.
3. Odredite prirast $\Delta f(x)$ i relativni prirast $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ za funkciju $f(x) := \sqrt{x}$ u x. Uputa: postupite analogno kao u Primjerima 10.2 i 10.3.

4. Pojednostavnite izraz za relativni prirast u Zadatku 3 proširujući razlomak s $\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}$. Koristeći to izračunajte derivaciju funkcije drugi korijen. Uputa: pređite na limes kad Δx ide u nulu.

5. (i) Crtajući graf funkcije $f(x) := x^2$ obrazložite za koje x_0 tangenta na parabolu $y = x^2$ u točki (x_0, x_0^2) ima pozitivan, a za koje negativan koeficijent smjera.
   (ii) Objasnite (i) koristeći se geometrijskom interpretacijom derivacije u točki.
   (iii) Posebno razmotrite $x_0 = 0$.

6. Obrazložite geometrijski da tangenta na graf funkcije $f(x) := \sqrt{x}$, $x > 0$, ima pozitivan koeficijent smjera. Protumačite to koristeći se geometrijskom interpretacijom derivacije u točki.

7. Koristeći se činjenicom da je $(x^2)' = 2x$ i interpretacijom derivacije kao brzine obrazložite da je:
   (i) brzina kvadratne funkcije pozitivna za $x > 0$, dakle da se za pozitivne x vrijednost x^2 povećava ako se x povećava
   (ii) brzina kvadratne funkcije negativna za $x < 0$, dakle da se za negativne x vrijednost x^2 smanjuje ako se x povećava
   (iii) za $x > 0$ brzina kvadratne funkcije to veća što je x veći.

11 SVOJSTVA DERIVACIJA. DERIVACIJE ELEMENTARNIH FUNKCIJA

U lekciji se razmatraju svojstva derivacija funkcija s obzirom na zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje i kompoziciju (derivacija složene funkcije i inverzne funkcije).
Također, izvode se derivacije nekih važnih elementarnih funkcija.

11.1 PRIPADNI PROBLEM

Jedan od najopćenitijih znanstvenih pristupa nekom problemu jest da se on razloži na elementarne (sastavne) dijelove, da se ti elementarni dijelovi razriješe te da se izgradi metoda rješavanja složenog problema ako se znaju riješiti njegovi sastavni dijelovi.

Poput složenih rečenica koje se grade od jednostavnih povezujući ih veznicima i sl., funkcije se tvore od jednostavnih pomoću operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i kompozicije. Da bismo razriješili problem deriviranja funkcija, izvest ćemo pravila prema kojima se može odrediti derivacija funkcije ako se znaju derivacije njenih sastavnih dijelova. Također ćemo izvesti derivacije najvažnijih elementarnih funkcija.

11.2 POTREBNO PREDZNANJE

Potrebno je poznavati:

1. analitičku definiciju derivacije funkcije (pomoću limesa):

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2. osnovne elementarne funkcije (potencije i korijene, eksponencijalne i logaritamske, trigonometrijske i arkus funkcije) te njihova osnovna svojstva

3. pojam limesa funkcije i njegova svojstva.

11.3 NOVE DEFINICIJE I TVRDNJE S PRIMJERIMA

11.3.1 Derivacija potencije i polinoma. Svojstva derivacija funkcija

Već smo vidjeli da za $f(x) = x^2$ vrijedi $f'(x) = 2x$, što kraće zapisujemo kao:

$$(x^2)' = 2x.$$

Neka je sad, općenito, $f(x) = x^n$, gdje je n prirodan broj. Tada je

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= (x + \Delta x)^n \\ &= x^n + nx^{n-1}\Delta x + (\ )x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n. \end{aligned}$$

Mogli bismo točno odrediti koeficijent uz svaku potenciju od x, međutim, nama je važan samo koeficijent uz x^{n-1}. Sad je:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}\Delta x + (\ )x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots) - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + (\ )x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (nx^{n-1} + (\ )x^{n-2}\Delta x + \dots) \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Kraće:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Primjer 11.1. [Derivacije potencija]

(i) $(x^3)' = 3x^2$

(ii) $(x)' = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$

(iii) $(1)' = (x^0) = 0 \cdot x^{0-1} = 0$, tj. derivacija konstantne funkcije 1 je nula. To smo mogli i izravno dobiti iz formule za derivaciju. □

Vrijede sljedeća **očita svojstva derivacije** funkcija

I. (i) Derivacija zbroja jednaka je zbroju derivacija:

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

(ii) Derivacija razlike jednaka je razlici derivacija:

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

II. Za svaki broj (konstantu) c vrijedi:

$$[cf(x)]' = cf'(x).$$

Formule se mogu zapisati i bez argumenta x:

I. (i) $(f+g)' = f' + g'$
   (ii) $(f-g)' = f' - g'$

II. $(cf)' = cf'$ za svaki broj (konstantu) c.

Te su formule izravne posljedice očitih svojstava limesa:

1. limes zbroja, tj. razlike jednak je zbroju, tj. razlici limesa
2. konstanta se može izlučiti ispred limesa.

Također, vrijedi, a koristit ćemo poslije:

3. limes produkta jednak je produktu limesa
4. limes kvocijenta jednak je kvocijentu limesa (ako u nazivniku nije nula).

Primjer 11.2. [Derivacija polinoma]

$$\begin{aligned}(4x^3 - 5x^2 + 7x + 3)' &= 4(x^3)' - 5(x^2)' + 7(x)' + 3(1)' \\ &= 4 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ &= 12x^2 - 10x + 7.\end{aligned}$$

□

Vidimo da pomoću očitih svojstava derivacija i formule za derivaciju potencije možemo derivirati bilo koji polinom tako da deriviramo član po član.

Vrijede i sljedeća **neočita svojstva derivacije** funkcija:

III. Derivacija umnoška-produkta funkcija:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Dakle, *ne vrijedi* da je derivacija umnoška umnožak derivacija. Izvod formule ostavit ćemo za kasnije.

IV. Derivacija kvocijenta-količnika funkcija:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Dakle, *ne vrijedi* da je derivacija kvocijenta kvocijent derivacija.

I ove formule mogu se zapisati bez argumenta x:

III. $(fg)' = f'g + fg'$

IV. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$.

Primjer 11.3. [Primjena formule za derivaciju kvocijenta]
Derivacija potencije s negativnim eksponentom:

$$\begin{aligned}(x^{-n})' &= \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} \\ &= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}}.\end{aligned}$$

□

Gornji rezultat može se zapisati i kao:

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}.$$

To znači da općenito, tj. *za svaki cijeli* eksponent m, vrijedi:

$$(x^m)' = mx^{m-1}.$$

Izvod formule za derivaciju produkta funkcija:

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x} \\ &+ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)]g(x+\Delta x)}{\Delta x} \\ &+ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) \\ &+ f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).\end{aligned}$$

U drugom redu izvoda dodali smo i oduzeli $f(x)g(x+\Delta x)$, a potom smo koristili činjenice da je limes zbroja jednak zbroju limesa i da je limes produkta jednak produktu limesa.
Izvod formule za derivaciju kvocijenta iz formule za derivaciju produkta:

$$\begin{aligned}\frac{f}{g} \cdot g &= f \quad \Big|\Big(\ \Big)' \\ \left(\frac{f}{g} \cdot g\right)' &= f' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' \cdot g + \frac{f}{g} \cdot g' &= f' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.\end{aligned}$$

11.3.2 Derivacija trigonometrijskih funkcija

Vrijedi, a te ćemo formule izvesti poslije:

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Čitamo i pamtimo kao:

derivacija sinusa je kosinus, a kosinusa minus sinus.

Primjer 11.4. [Derivacije trigonometrijskih funkcija]

(i) $(x \sin x)' = x' \sin x + x(\sin x)' = \sin x + x \cos x$

(ii) $(x \cos x)' = x' \cos x + x(\cos x)' = \cos x + x(-\sin x) = \cos x - x \sin x.$ □

Uočimo da, općenito, ne možemo u izrazu za derivaciju funkcije pomoću limesa, uvrstiti $\Delta x = 0$, jer bismo dobili izraz $\frac{0}{0}$. Tu smo poteškoću kod izvođenja formule za derivaciju potencije uspjeli razriješiti tako što smo u brojniku izlučili Δx te pokratili Δx u nazivniku. Nakon toga smo u limesu mogli uvrstiti $\Delta x = 0$ i dobiti rezultat. Tako nešto ne vrijedi općenito, tj. nećemo uvijek moći izlučiti Δx u brojniku. Na primjer, to nećemo moći učiniti pri izvodu formula za derivaciju sinusa, kosinusa, eksponencijalne funkcije. Zato ćemo trebati neke posebne, tzv. *značajne* limese.
Značajni limes koji je potreban za izvod derivacije sinusa i kosinusa:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Nama će biti potrebna ta formula u kojoj će umjesto t biti Δx. U istinitost jednakosti uvjeravamo se uvrštavanjem sve manjih vrijednosti t. Naravno, ta se jednakost može i strogo matematički dokazati. Uočimo da se taj limes ne može dobiti pukim uvrštavanjem $t = 0$ (jer se dobije $\frac{0}{0}$).

Primjer 11.5. [Trigonometrijski limesi]
Neki limesi koji se izvode iz $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$:

(i) $\lim_{t \to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$

(ii) $\lim_{t \to 0} \frac{1-\cos t}{t} = 0.$

(i) Uočimo da za $\cos t \neq -1$ vrijedi:

$$\begin{aligned} \frac{1-\cos t}{t^2} &= \frac{1-\cos t}{t^2} \cdot \frac{1+\cos t}{1+\cos t} = \frac{1-\cos^2 t}{t^2(1+\cos t)} \\ &= \frac{\sin^2 t}{t^2} \cdot \frac{1}{1+\cos t} = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos t}. \end{aligned}$$

Zato je

$$\lim_{t \to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \lim_{t \to 0} \left[\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos t}\right] = 1^2 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

(ii) Tvrdnja izravno slijedi iz (i). Naime:

$$\frac{1-\cos t}{t} = \frac{1-\cos t}{t^2} \cdot t$$

pa je:

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{1-\cos t}{t^2} \cdot t\right) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

□

Za izvod derivacije sinusa i kosinusa potrebno je poznavati i adicijsku formulu

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Izvod formule za derivaciju sinusa:

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin x(\cos \Delta x - 1) + \cos x \sin \Delta x}{\Delta x} \\
&= \sin x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \\
&= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 \\
&= \cos x.
\end{aligned}$$

Tu smo $\sin x$, odnosno $\cos x$ izvukli ispred limesa jer ti izrazi ne ovise o Δx pa se ponašaju kao konstante. Također, iskoristili smo značajni limes $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ i limes (ii) iz Primjera 11.5.
Formula za derivaciju kosinusa izvede se slično, samo se treba koristiti adicijska formula za kosinus (ili formula za pretvaranje razlike kosinusa u produkt).

Primjer 11.6. [Derivacija tangensa i kotangensa]
Ovo je još jedna primjena formule za derivaciju kvocijenta. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} \\
(\operatorname{ctg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}.
\end{aligned}$$

Izvodimo prvu formulu:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.
\end{aligned}$$

Druga formula izvodi se analogno. □

11.3.3 Derivacija eksponencijalne funkcije. Derivacija složene funkcije

Vrijedi:

$$(e^x)' = e^x,$$

tj. eksponencijalna funkcija s prirodnom bazom ne mijenja se pri deriviranju.

Značajni limes koji je potreban za izvod derivacije eksponencijalne funkcije:

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$$

U taj se limes također možemo uvjeriti uvrštavanjem sve manjih brojeva t (dokaz ovdje ne provodimo). Uočimo da se limes ne može dobiti pukim uvrštavanjem $t = 0$ (dobije se $\frac{0}{0}$).

Izvod formule za derivaciju eksponencijalne funkcije:

$$\begin{aligned}(e^x)' &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^x e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 \\ &= e^x.\end{aligned}$$

Dajemo još jedno neočito svojstvo derivacije funkcija:

V. Formula za derivaciju složene funkcije - derivacija kompozicije funkcija:

$$[f(g(x))]' = f'[g(x)] \cdot g'(x).$$

Zapis bez argumenta x: $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$.
Uočimo razliku između znaka $\circ$ koji označuje kompoziciju funkcija od znaka $\cdot$ koji označuje množenje (i katkad se ispušta).

Primjer 11.7. [Jedna primjena formule za derivaciju složene funkcije]

$$[\sin(ax)]' = a \cdot \cos(ax)$$

za svaki realan broj (konstantu) a. Naime, prema formuli za derivaciju kompozicije, vrijedi

$$[\sin(ax)]' = \sin'(ax) \cdot (ax)' = \cos(ax) \cdot a = a \cdot \cos(ax).$$

Dakle, $[\sin(2x)]' = 2\cos(2x)$, a ne $\cos(2x)$ kako se na prvi pogled može učiniti. □

Primjer 11.8. [Derivacija opće eksponencijalne funkcije]
Ovo je još jedna primjena formule za derivaciju složene funkcije:

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

Naime, iz $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{\ln a \cdot x}$ dobijemo

$$(a^x)' = (e^{\ln a \cdot x})' = e^{\ln a \cdot x} \cdot (\ln a \cdot x)' = a^x \cdot \ln a.$$

□

11.3.4 Derivacija inverzne funkcije. Derivacija logaritamske funkcije, arkus funkcija i korijena

Posljednje, također neočito, svojstvo derivacije funkcija:

VI. Formula za derivaciju inverzne funkcije:

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]}.$$

Zapis bez argumenta x:

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Izvod formule za derivaciju inverzne funkcije: koristimo formulu za derivaciju složene funkcije. Iz

$$f\left[f^{-1}(x)\right] = x$$

za sve x iz domene od f^{-1}, deriviranjem dobijemo

$$\left(f\left[f^{-1}(x)\right]\right)' = 1$$
$$f'\left[f^{-1}(x)\right] \cdot \left(f^{-1}\right)'(x) = 1,$$

odakle se dobije tražena formula.

Primjer 11.9. [Derivacija logaritamske funkcije i arkus funkcija]
Ovo je važna primjena formule za derivaciju inverzne funkcije.

(i) Derivacija logaritamske funkcije:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

Naime, ako je $f^{-1}(x) = \ln x$, onda je $f(x) = e^x$ i $f'(x) = e^x$. Sad je:

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

(ii) Derivacija arkus funkcija:

$$(\operatorname{Arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\operatorname{Arccos} x)' = -(\operatorname{Arcsin} x)'.$$

Naime, ako je $f^{-1}(x) = \operatorname{Arcsin} x$, onda je $f(x) = \sin x$ i $f'(x) = \cos x$, ali na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Napomenimo da na tom intervalu vrijedi $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ jer je tu kosinus pozitivan. Zato je sad

$$\begin{aligned}(\operatorname{Arcsin} x)' &= \frac{1}{\sin'(\operatorname{Arcsin} x)} = \frac{1}{\cos(\operatorname{Arcsin} x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\operatorname{Arcsin} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-[\sin(\operatorname{Arcsin} x)]^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

Uočimo da je desna strana u formuli za derivaciju arkus sinusa definirana za $-1 < x < 1$, što znači da funkcija nije derivabilna u rubovima. To se vidi geometrijski tako što je tangenta na graf u rubnim točkama usporedna s y-osi - ima "beskonačan" koeficijent smjera. □

Primjer 11.10. [Derivacija korijena]
Ovo je još jedna primjena formule za derivaciju inverzne funkcije.

(i) Derivacija drugog korijena: ako je $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, uz $x > 0$, onda je $f(x) = x^2$ i $f'(x) = 2x$. Zato je

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(ii) Derivacija općeg korijena: ako je $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$, uz $x > 0$ za parne i $x \neq 0$ za neparne korijene, onda je $f(x) = x^n$ i $f'(x) = nx^{n-1}$. Zato je

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

□

Iz formula za derivaciju općeg korijena i derivaciju složene funkcije dobivamo sljedeću formulu (uz $x > 0$):

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1},$$

što znači da i za razlomljene eksponente vrijedi isto pravilo deriviranja koje smo imali i za cjelobrojne eksponente. Štoviše, može se pokazati da formula

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

vrijedi za *sve realne* eksponente. Tu je, općenito, $x > 0$. Ako je eksponent n prirodan broj, onda formula vrijedi za svaki x, a ako je n negativan cijeli broj, onda vrijedi za sve $x \neq 0$.

11.3.5 Tablica značajnih derivacija

Ovu tablicu treba znati napamet.

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$

   $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

   $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. $(\sin x)' = \cos x$

   $(\cos x)' = -\sin x$

   $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

   $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

3. $(\operatorname{Arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

   $(\operatorname{Arccos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

   $(\operatorname{Arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

   $(\operatorname{Arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

4. $(e^x)' = e^x$

   $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

   $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

11.4 PRIMJENA MATLAB-A

11.4.1 Računanje derivacija. Naredba diff

Derivacija funkcija i derivacija funkcije u točki provodi se naredbom diff. Pokažimo najprije upotrebu te naredbe na određivanje derivacije funkcije:

```
diff(x^2)                                          % 2*x
```

Puni zapis gornje naredbe je `diff(x^2, x)` no, kako nema zabune oko toga po kojoj varijabli deriviramo, mogli smo ga skratiti.
Odredimo derivacije još nekih funkcija:

```
syms x n
diff(x^n)                                  % n*x^(n - 1)
diff(nthroot(x, n))                   % nthroot(x, n)/(n*x)
diff(sin(x))                                    % cos(x)
diff(asin(x))                           % 1/(1 - x^2)^(1/2)
```

Naizgled se čini da je rezultat deriviranja funkcije $f(x) = \sqrt[n]{x}$ kojeg smo dobili naredbom diff različit od onog iz 11.3.5. Ipak, ta su dva rezultata jednaka, što se lako može provjeriti.

Derivacija funkcije u točki računa se kao i inače kad računamo vrijednost funkcije. Odredimo $f'(2)$ za funkciju $f(x) = x^3$:

```
syms x
f(x) = x^3
Df = diff(f)                                                    % 3*x^2
Df(2)                                                           % 12
```

11.4.2 Deriviranje simbolički zadanih funkcija

Naredba `diff` može provoditi i simboličko deriviranje, ali ipak ne za sve formule koje smo imali u ovoj lekciji:

- derivacija umnoška funkcija:

  ```
  syms x f(x) g(x)
  D_umnozak = diff(f*g)
  ```

  ```
  D_umnozak(x) = f(x)*diff(g(x), x) + g(x)*diff(f(x), x)
  ```

- derivacija kvocijenta funkcija:

  ```
  syms x f(x) g(x)
  D_kvocijent = diff(f/g)
  ```

  ```
  D_kvocijent(x) =
      diff(f(x), x)/g(x) - (f(x)*diff(g(x), x))/g(x)^2
  ```

  Za rezultat koji smo dobili lako se može utvrditi da je u skladu s poznatom formulom za derivaciju kvocijenta funkcija iz 13.3.3.

- derivacija složene funkcije:

  ```
  syms x f(x) g(x)
  D_slozena = diff(compose(f, g))
  ```

  ```
  D_slozena(x) = D(f)(g(x))*diff(g(x), x)
  ```

  U rezultatu vidimo simbol `D` kojeg MATLAB ponekad koristi kao izraz za označavanje derivacije, ali samo u zapisu rješenja. Taj se simbol ne može koristiti kao naredba za računanje derivacija.

- derivacija inverzne funkcije:

  ```
  syms x f(x)
  D_inverzna = diff(finverse(f))
  ```

  ```
  Warning: Unable to find functional inverse.
  D_inverzna(x) = Empty sym: 0-by-1
  ```

Ovdje MATLAB nije uspio provesti simbolički račun jer bez konkretne funkcije `f` ne zna izvršiti naredbu `finverse` i ne može nastaviti s deriviranjem.

Provjerimo na primjeru funkcije $f(x) = \sin x$ i njoj inverzne funkcije $f^{-1}(x) = \operatorname{Arcsin} x$ da računanje derivacije inverzne funkcije korištenjem formule

$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]}$$

daje rezultat identičan onom kojeg smo za derivaciju funkcije arkus sinus dobili u 11.4.1, uporabom naredbe `diff`. Kako formula za derivaciju inverzne funkcije računa kompoziciju funkcija, potrebno je koristiti naredbu `compose`:

```
syms x
f(x) = sin(x)
invf = finverse(f)                                    % asin(x)
dinvf = 1/compose(diff(f), invf)           % 1/(1 - x^2)^(1/2)
```

11.5 PITANJA I ZADATCI

1. Izvedite prema definiciji, korak po korak, derivaciju funkcije $f(x) := x^3$. Uputa: u postupku za derivaciju n-te potencije uvrstite $n = 3$ i do kraja provedite sve korake.

2. Koristeći formulu za derivaciju umnoška izvedite formulu

   $$[cf(x)]' = cf'(x).$$

   Uputa: konstantu c shvatite kao funkciju.

3. Obrazložite zašto je

   $$\left[\frac{f(x)}{c}\right]' = \frac{f'(x)}{c}$$

   za konstantu c različitu od nule:

   (i) koristeći da se konstanta može izvući ispred znaka deriviranja

   (ii) koristeći formulu za derivaciju kvocijenta funkcija.

   Komentirajte dobivene rezultate. Uputa: za (i) uočite da je dijeljenje brojem isto što i množenje recipročnom vrijednošću tog broja. Rezultat u (ii), nakon sređivanja, treba biti jednak onom iz (i).

4. Obrazložite zašto je

   $$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg}(t)}{t} = 1.$$

   Uputa: koristite da je $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$.

5. Odredite $[\mathrm{tg}(ax)]'$ i $[\mathrm{ctg}(ax)]'$ za realnu konstantu a.

6. Odredite, za realnu konstantu a:
$[\mathrm{Arcsin}(ax)]'$, $[\mathrm{Arccos}(ax)]'$, $[\mathrm{Arctg}(ax)]'$ i $[\mathrm{Arcctg}(ax)]'$.

7. Odredite $[\ln(bx)]'$ i $\left[\log_a(bx)\right]'$ za pozitivnu konstantu b. Zašto b treba biti pozitivan? Komentirajte rezultate. Zašto su oni logični? Uputa za komentar: uočite da je $\ln(bx) = \ln b + \ln x$ pa račun možete provesti na dva različita načina.

12 APROKSIMACIJA FUNKCIJE. TAYLOROV RED

U lekciji se razmatra primjena derivacije za približno računanje vrijednosti funkcija - linearna aproksimacija, kvadratna aproksimacija itd. te razvoj u beskonačni (Taylorov) red važnih elementarnih funkcija.

12.1 PRIPADNI PROBLEM

Problem računanja star je više tisuća godina. Usporedno s razvojem teoretskih osnova računanja ide tehnološki razvoj pomagala za računanje (danas su to kalkulatori i računala).
Izvođenje osnovnih računskih operacija relativno je jednostavno (iako i tu ima poteškoća), međutim korjenovanje, a naročito logaritmiranje, računanje vrijednosti eksponencijalnih i trigonometrijskih funkcija uglavnom su neizvedivi, ukoliko želimo dobiti točne rezultate. Zato se pribjegava približnom računanju.
Teoretski temelj približnog računanja vrijednosti funkcija (aproksimacija) jesu derivacije, uz pomoć kojih se funkcija, na primjer *sinus*, približno može predočiti u obliku polinoma, tj. linearne funkcije, kvadratne funkcije itd. Stoga se, umjesto računanja vrijednosti (sinus) funkcije, računa vrijednost tog polinoma, što je u pravilu moguće.

12.2 POTREBNO PREDZNANJE

Potrebno je poznavati pojam i geometrijsko značenje derivacije, osnovne elementarne funkcije te njihove derivacije.
Za kvadratnu aproksimaciju i za aproksimacije višeg reda potreban je pojam derivacije drugog reda i višeg reda.

Druga derivacija f'' funkcije f je, prema definiciji, derivacija prve derivacije:

$$f'' := (f')'.$$

Treća derivacija je derivacija druge derivacije, četvrta treće itd:

$$f''' := (f'')'$$
$$f^{IV} := (f''')'.$$

n-ta derivacija piše se kao $f^{(n)}$.

Primjer 12.1. [Derivacije višeg reda]
Ako je $f(x) := \sin x$, onda je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\sin x \\ f'''(x) &= -\cos x \\ f^{IV}(x) &= \sin x \quad \text{itd.} \end{aligned}$$

□

12.3 NOVE DEFINICIJE I TVRDNJE S PRIMJERIMA

12.3.1 Linearna aproksimacija funkcije

Analitički pristup: iz formule za derivaciju funkcije f u točki x_0

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

vidi se da je

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

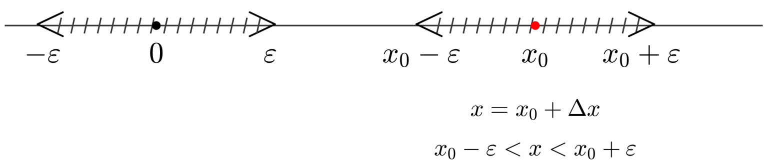
Izbacili smo limes, ali smo umjesto znaka jednakosti stavili znak približne jednakosti. Tu pretpostavljamo da je Δx relativno malen, tj. blizu nule.
Gornja se formula može zapisati i ovako:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

To je **formula za linearnu aproksimaciju** funkcije f oko x_0. Dio $f'(x_0) \cdot \Delta x$ je *približni prirast* funkcije f kad se argument mijenja od x_0 do $x_0 + \Delta x$.
Postoji i *alternativni zapis* formule za linearnu aproksimaciju:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Tu formulu dobijemo tako da u originalnu formulu stavimo x umjesto $x_0 + \Delta x$, odnosno, dosljedno tome, $x - x_0$ umjesto Δx. Kraće: $x = x_0 + \Delta x$, $\Delta x = x - x_0$.
Uočimo (Slika 12.1): ako se Δx mijenja oko nule (na primjer, ako je $-\varepsilon < \Delta x < \varepsilon$), onda se x, tj. $x_0 + \Delta x$ mijenja oko x_0, preciznije: $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$.



Slika 12.1: Ovisnost $x_0 + \Delta x$ o Δx

Važnost formule za linearnu aproksimaciju: iz formule vidimo da, ako znamo $f(x_0)$ i $f'(x_0)$, onda ćemo, mijenjajući Δx oko nule, moći približno odrediti vrijednosti funkcije f oko x_0. Razlika između stvarne vrijednosti (koju u pravilu ne znamo) i približne vrijednosti dobivene linearnom aproksimacijom (koju znamo), zove se **pogreška linearne aproksimacije**. Kraće:

Pogreška = Stvarna vrijednost - Približna vrijednost

To ilustriramo na primjeru.

Primjer 12.2. [Linearna aproksimacija funkcije - analitički pristup] Ne koristeći kalkulator (ili neko drugo pomagalo) približno izračunajmo $\sqrt{98}$, $\sqrt{99}$, $\sqrt{100}$, $\sqrt{101}$ i $\sqrt{102}$.

Tu je $f(x) := \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pa vidimo da je dobro uzeti $x_0 := 100$ jer je

$$f(100) = \sqrt{100} = 10 \text{ i}$$

$$f'(100) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{100}} = 0.05.$$

Da približno odredimo $\sqrt{101}$ treba u formulu za linearnu aproksimaciju uvrstiti $\Delta x = 1$:

$$\sqrt{101} \approx 10 + 0.05 \cdot 1 = 10.05.$$

Mijenjajući Δx da bude redom -2, -1, 0, 1 i 2, dobijemo Tablicu 12.1.

x	98	99	100	101	102
$\sqrt{x}$	9.899495	9.949874	10.	10.049876	10.099505
linearna aproksimacija	9.900000	9.950000	10.	10.050000	10.100000
pogreška aproksimacije	−0.000505	−0.000126	0.	−0.000124	−0.000495

Tablica 12.1: Primjer 12.2

U drugom su retku odgovarajuće vrijednosti dobivene kalkulatorom, zaokružene na 6 decimala, u trećemu približne vrijednosti dobivene linearnom aproksimacijom, a u četvrtom je pogreška aproksimacije tj. razlika podatka drugog i trećeg retka - to je, u stvarnosti, približna pogreška jer smo podatke drugog retka dobili zaokruživanjem.
Služimo se formulom:

$$\sqrt{100 + \Delta x} \approx 10 + 0.05\Delta x,$$

a možemo i formulom

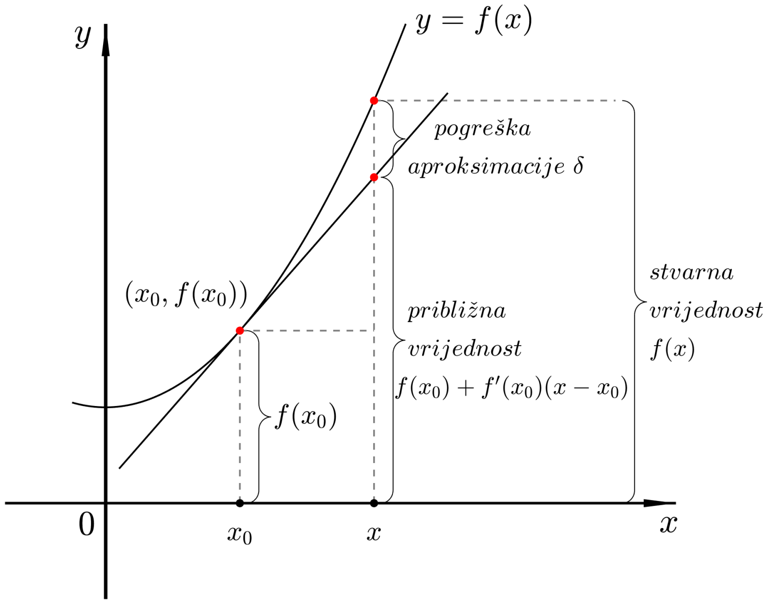
$$\sqrt{x} \approx 10 + 0.05(x - 100),$$

u koju redom stavljamo $x = 98, 99, 100, 101, 102$ (jasno je da smo desnu stranu mogli srediti i dobiti $\sqrt{x} \approx 0.05x + 5$).
Uočimo sljedeće činjenice (pokušajte ih objasniti):

(i) vrijednosti dobivene linearnom aproksimacijom (u ovom primjeru) veće su od stvarnih

(ii) kako se x približava s lijeva ili s desna prema x_0, aproksimacija je sve bolja. □

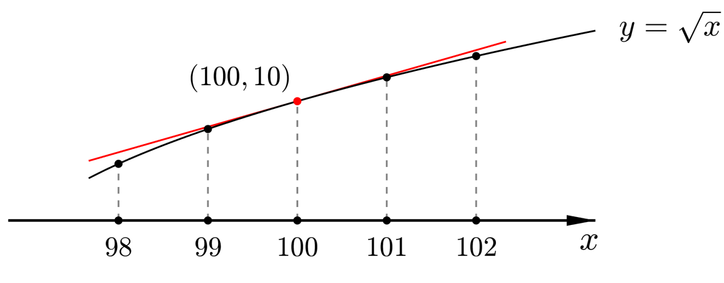
Geometrijski pristup - geometrijska interpretacija formule za linearnu aproksimaciju (Slika 12.2).



Slika 12.2: Geometrijska interpretacija formule za linearnu aproksimaciju

Geometrijski, linearna se aproksimacija temelji na intuitivno jasnu načelu da se od svih pravaca koji prolaze točkom $(x_0, f(x_0))$, grafu funkcije f najbolje "priljubljuje" tangenta u toj točki grafa.

Primjer 12.3. [Linearna aproksimacija funkcije - geometrijski pristup] Geometrijski predočimo i objasnimo Primjer 12.2. Na Slici 12.3 vidimo da je tangenta na graf funkcije $f(x) := \sqrt{x}$ u točki grafa $(100, 10)$ iznad grafa. Pri linearnoj aproksimaciji očitavamo vrijednosti ordinata na tangenti (što su približne vrijednosti), a ne na grafu funkcije (što su stvarne vrijednosti).



Slika 12.3: Primjer 12.3

Sad možemo pojasniti (i) i (ii) iz Primjera 12.2:

(i) približne su vrijednosti veće od stvarnih jer je tangenta iznad grafa, tj. jer je f konkavna funkcija

(ii) kako za $\Delta x > 0$ tako i za $\Delta x < 0$, aproksimacije su bolje za manje Δx (po apsolutnoj vrijednosti) jer su pogreške aproksimacije manje (tangenta je bliže grafu). □

12.3.2 Kvadratna aproksimacija funkcije

Kod linearne aproksimacije funkcije f oko x_0 imali smo sljedeće:

1. funkciju f i realan broj x_0 oko kojega je f definirana
2. *linearnu funkciju* $g(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Funkciju f oko x_0 aproksimirali smo linearnom funkcijom g, tj.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Uočimo ovo:

(0) $g(x_0) = f(x_0)$ i

(1) $g'(x_0) = f'(x_0)$.

Drugim riječima, f i g imaju jednake vrijednosti u x_0 i jednake vrijednosti derivacija u x_0. Naime:

$$\begin{aligned} g(x_0) &= f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0) = f(x_0) + 0 = f(x_0) \\ g'(x) &= 0 + f'(x_0) \cdot 1 = f'(x_0) \text{ za sve } x \text{ pa i za } x = x_0. \end{aligned}$$

Uočavamo da je "razumno" definirati **kvadratnu aproksimaciju** funkcije f oko x_0 kao kvadratnu funkciju h koja u x_0 ima jednake vrijednosti te jednake prve i druge derivacije kao i f, tj. za koju vrijedi:

$$\begin{aligned} h(x_0) &= f(x_0) \\ h'(x_0) &= f'(x_0) \\ h''(x_0) &= f''(x_0). \end{aligned}$$

Da bismo odredili h u ovisnosti o f i x_0, napišimo je po potencijama od $x - x_0$:

$$h(x) := c + b(x - x_0) + a(x - x_0)^2.$$

Treba odrediti koeficijente a, b i c. Vidimo da je $h'(x) = b + 2a(x - x_0)$ i $h''(x) = 2a$. Zato je $h(x_0) = c$, $h'(x_0) = b$ i $h''(x_0) = 2a$, dakle, $c = f(x_0)$, $b = f'(x_0)$ i $a = \frac{f''(x_0)}{2}$. Uvrštavanjem u izraz za h dobijemo $h(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$.

Sad $f(x) \approx h(x)$ postaje

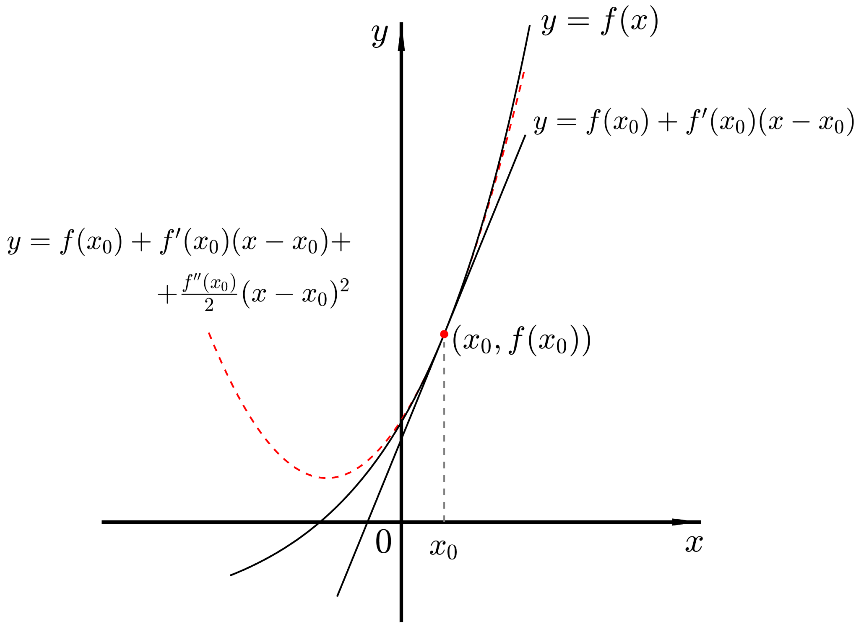
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

To je **formula za kvadratnu aproksimaciju** funkcije f oko x_0. Vidimo da je linearni dio desne strane jednak onome kod linearne aproksimacije pa se ta formula može smatrati korekcijom linearne: dodan je *kvadratni član* $\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$.

Formulu možemo zapisati i pomoću Δx zamjenom $x = x_0 + \Delta x$ i $x - x_0 = \Delta x$:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2}(\Delta x)^2.$$

Geometrijska interpretacija kvadratne aproksimacije - Slika 12.4.



Slika 12.4: Geometrijska interpretacija formule za kvadratnu aproksimaciju

Vidimo da je kvadratna aproksimacija predočena parabolom, analogno kako je linearna pravcem.

Primjer 12.4. [Kvadratna aproksimacija funkcije]
Pomoću kvadratne aproksimacije

$$\sqrt{x} \approx 10 + 0.05(x - 100) - \frac{1}{8000}(x - 100)^2$$

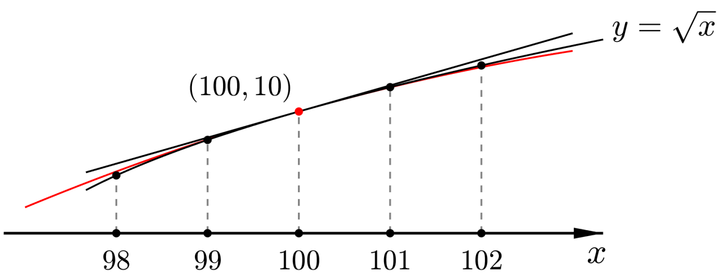
približno izračunajmo $\sqrt{98}$, $\sqrt{99}$, $\sqrt{100}$, $\sqrt{101}$ i $\sqrt{102}$.

x	98	99	100	101	102
$\sqrt{x}$	9.899495	9.949874	10.	10.049876	10.099505
kvadratna aproksimacija	9.899500	9.949875	10.	10.049875	10.099950
pogreška aproksimacije	−0.000005	−0.000001	0.	0.000001	0.000005

Tablica 12.2: Primjer 12.4

Rezultate iz Tablice 12.2 usporedimo s Tablicom 12.1 iz Primjera 12.2, gdje smo koristili linearnu aproksimaciju.

Geometrijski, uočimo položaj parabole kvadratne aproksimacije u odnosu na pravac linearne aproksimacije (Slika 12.5).



Slika 12.5: Primjer 12.4

□

12.3.3 Aproksimacije višeg reda

Analogno linearnoj i kvadratnoj aproksimaciji (aproksimacijama prvog i drugog reda), definiramo kubnu aproksimaciju (aproksimaciju trećeg reda) i, općenito, aproksimaciju n-tog reda.
Prisjetimo se faktorijela: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, posebno: $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$ i, prema dogovoru, $0! = 0$.

Kubna aproksimacija

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3$$

ili, u drugom zapisu:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(\Delta x)^3.$$

Aproksimacija n-tog reda

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

ili, u drugom zapisu:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n.$$

Primjer 12.5. [Aproksimacije eksponencijalne funkcije]

(i) odredimo aproksimacije do četvrtog reda te općeg (n-tog) reda eksponencijalne funkcije oko nule

(ii) približno izračunajmo broj e.

Aproksimacija će biti po potencijama od x (jer je $x_0 = 0$).

(i) Tu je $f(x) := e^x$ i $x_0 = 0$ pa je $f(0) = e^0 = 1$ i $f^{(n)}(0) = 1$ za sve n.

Zato je:

(0) Nulta aproksimacija: $e^x \approx 1$

(1) Linearna aproksimacija: $e^x \approx 1 + x$

(2) Kvadratna aproksimacija: $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$

(3) Kubna aproksimacija: $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$

(4) Aproksimacija 4. reda: $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$

(n) Aproksimacija n-tog reda:

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

(ii) Iskoristit ćemo (i) i činjenicu da je $e = e^1$ pa u formule za aproksimaciju stavljamo $x = 1$. Napomenimo da je (kalkulator, zaokruženo na dvije decimale) $e \approx 2.72$.

(0) Nulta aproksimacija: $e \approx 1$ (loše)

(1) Linearna aproksimacija: $e \approx 1 + 1 = 2$ (bolje, ali i dalje loše)

(2) Kvadratna aproksimacija: $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} = 2.5$ (još bolje, ali i dalje loše)

(3) Kubna aproksimacija: $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3} = 2.666\ldots$ (blizu, ali bi moglo bliže)

(4) Aproksimacija 4. reda: $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{65}{24} \approx 2.71$ (zaokruženo na dvije decimale - točno na jednu decimalu)

(n) Aproksimacija n-tog reda:

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

$\square$

Primjer 12.6. [Aproksimacije sinusa i kosinusa]

(i) Odredimo aproksimacije do četvrtog reda funkcije kosinus oko nule.

(ii) Odredimo aproksimacije do četvrtog reda funkcije sinus oko nule.

(i) Tu je

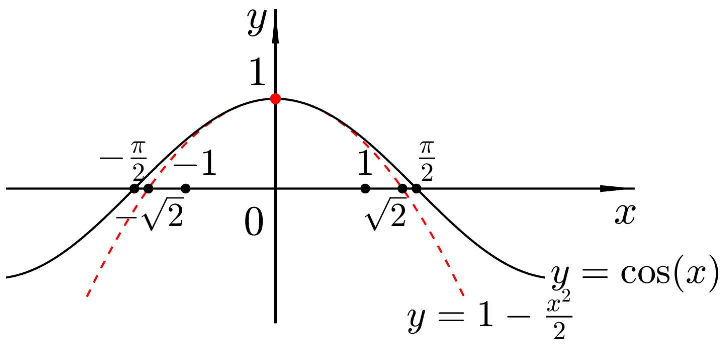
$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x & f(0) &= \cos 0 = 1 \\ f'(x) &= -\sin x & f'(0) &= -\sin 0 = 0 \\ f''(x) &= -\cos x & f''(0) &= -\cos 0 = -1 \\ f'''(x) &= \sin x & f'''(0) &= \sin 0 = 0 \\ f^{IV}(x) &= \cos x & f^{IV}(0) &= \cos 0 = 1. \end{aligned}$$

Zato je:

(0) Nulta aproksimacija: $\cos x \approx 1$

(1) Linearna aproksimacija: $\cos x \approx 1$ (kao i za linearnu)

(2) Kvadratna aproksimacija: $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$, Slika 12.6 i Tablica 12.3



Slika 12.6: Primjer 12.6 (i) - kvadratna aproksimacija funkcije cos oko nule

x	0	0.2	0.5	1	2
$\cos x$	1.000000	0.980067	0.877583	0.540302	−0.416149
$1 - \frac{x^2}{2}$	1.000000	0.980000	0.875000	0.500000	−1.000000
pogreška aproksimacije	0.	0.000067	0.002583	0.040302	0.583853

Tablica 12.3: Primjer 12.6 (i) - kvadratna aproksimacija funkcije cos oko nule

(3) Kubna aproksimacija: kao i za kvadratnu

(4) Aproksimacija 4. reda: $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$.

(ii) Tu je

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x & f(0) &= \sin 0 = 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= \cos 0 = 1 \\ f''(x) &= -\sin x & f''(x) &= -\sin 0 = 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(x) &= -\cos 0 = -1 \\ f^{IV}(x) &= \sin x & f^{IV}(0) &= \sin 0 = 0. \end{aligned}$$

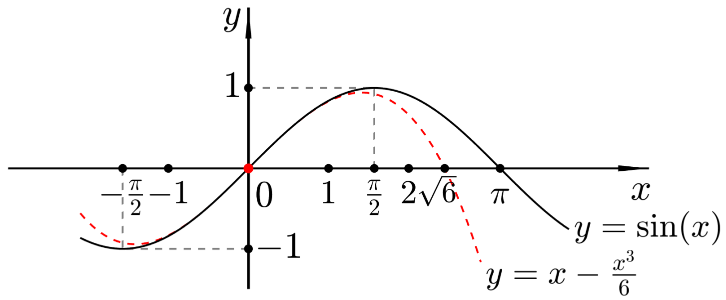
Zato je:

(0) Nulta aproksimacija: $\sin x \approx 0$

(1) Linearna aproksimacija: $\sin x \approx x$

(2) Kvadratna aproksimacija: $\sin \approx x$ (kao i linearna)

(3) Kubna aproksimacija: $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$, Slika 12.7 i Tablica 12.4



Slika 12.7: Primjer 12.6 (ii) - kubna aproksimacija funkcije sin oko nule

x	0	0.2	0.5	1	2
$\sin x$	0.000000	0.198669	0.479426	0.841871	0.909297
$x - \frac{x^3}{6}$	0.000000	0.198667	0.479167	0.833333	0.666667
pogreška aproksimacije	0.	0.000002	0.000259	0.008138	0.242630

Tablica 12.4: Primjer 12.6 (ii) - kubna aproksimacija funkcije sin oko nule

(4) Aproksimacija 4. reda: kao i za kubnu.

□

12.3.4 Taylorov red - razvoj funkcije

Sjetimo se aproksimacije n-tog reda (elementarne) funkcije f oko x_0:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Tu je na lijevoj strani neka elementarna funkcija f, a na desnoj polinom n-tog stupnja napisan po potencijama od $x - x_0$. Lijeva strana u pravilu je to bliže desnoj što je x bliže x_0 (za x relativno blizu x_0). Također, za fiksirani x blizu x_0, lijeva strana u pravilu je to bliža desnoj što je stupanj n veći. Ako n pustimo da ide u beskonačnost, dobit ćemo *jednakost*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots$$

Tu tri točkice označuju da se zbrajanje nastavlja prema istom pravilu i nikad ne prestaje.
To je **Taylorov razvoj funkcije** f oko x_0, točnije, Taylorov razvoj je desna strana. Tu je umjesto približne vrijednosti stavljena jednakost, ali je zato umjesto konačnog reda (polinoma), sad na desnoj strani beskonačan red, odnosno "polinom beskonačna stupnja u potencijama od $x - x_0$".
Za koje x vrijedi jednakost u Taylorovu razvoju? Jednakost u Taylorovu razvoju *može, ali ne mora* vrijediti za sve x iz područja definicije funkcije f. Skup svih x za koje jednakost vrijedi zove se **područje konvergencije** reda - razvoja. Na primjer, za eksponencijalnu funkciju, sinus i kosinus, područje konvergencije je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$.

Dakle, sljedeće jednakosti vrijede *za sve* realne vrijednosti x:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad \text{Kraće: } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \qquad \text{Kraće: } \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \qquad \text{Kraće: } \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Da područje konvergencije može biti manje od domene, pokazuju sljedeći primjeri.

Primjer 12.7. [Geometrijski red - vrlo važan red]
Odredimo Taylorov red oko nule za funkciju $f(x) := \frac{1}{1-x}$. Postupajući kao i prije, dobijemo

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Red na desnoj strani zove se **geometrijski red**. Ta se jednakost obično piše tako da lijevo bude geometrijski red, zato što je to kompliciraniji dio formule:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}.$$

Ova se formula često zove **zbroj geometrijskog reda**. Formula vrijedi za $-1 < x < 1$, što je isto kao da kažemo da je interval $\langle -1, 1 \rangle$ *područje konvergencije*. Kako je taj interval duljine 2 i simetričan s obzirom na ishodište, broj 1 zove se **radijus konvergencije**.

Provjerimo formalno jednakost. Množenjem s $1 - x$, vidimo da bi trebalo biti: $(1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = 1$. Zaista:

$$\begin{aligned} &(1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = \\ &= (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) - x(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) \\ &= (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) - (x + x^2 + x^3 + \dots) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Zašto jednakost ne vrijedi za sve x iako "izgleda" da smo je provjerili za sve x? Uočimo da smo pri "provjeri" koristili distribuciju množenja prema beskonačnom zbroju, međutim, takvo pravilo općenito vrijedi samo za konačan zbroj. □

Primjer 12.8. [Geometrijski red - nastavak]
Uvrstimo redom umjesto x brojeve 2, 1, 0, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, 2 i -1 u formulu za zbroj geometrijskog reda i provjerimo smisao.

Uočimo, na početku:

(i) U $\frac{1}{1-x}$ možemo uvrstiti sve x osim $x = 1$ (jer se tada pojavi nula u nazivniku).

(ii) Pri uvrštavanju u $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ može nastati problem jer treba zbrojiti beskonačno mnogo brojeva.

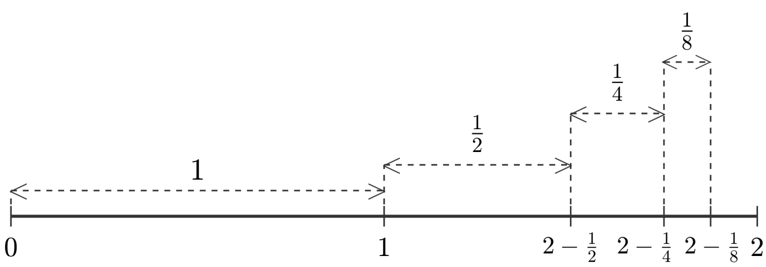
$x = 2$ Dobijemo: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots = \frac{1}{1-2}$, što nema smisla jer lijeva strana ide u $+\infty$, a desna je -1. Zato 2 nije u području konvergencije.

$x = 1$ Dobijemo $1 + 1 + 1^2 + 1^3 + \cdots = \frac{1}{1-1}$, što nema smisla jer lijeva strana ide u $+\infty$ (što nije broj), a desna nije definirana. Zato 1 nije u području konvergencije.
To se ipak malo razlikuje od prethodnog slučaja jer netko može interpretirati $\frac{1}{0}$ kao $+\infty$, pa s obje strane jednakosti imamo $+\infty$ (problem je što to nije broj).

$x = 0$ Dobijemo $1 + 0 + 0^2 + 0^3 + \cdots = \frac{1}{1-0}$, što je istinito (beskonačna je suma postala konačna). Zato je 0 u području konvergencije.

$x = \frac{1}{2}$ Dobijemo $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$. To je istinita jednakost, jer zbrajajući član po član vidimo (Slika 12.8):

$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2}$
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{7}{4} = 2 - \frac{1}{4}$
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{15}{8} = 2 - \frac{1}{8}$.



Slika 12.8: Primjer 12.8

Općenito:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

pa lijeva strana teži u 2 kad n teži u $+\infty$. To se piše ovako:

$$
\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots &= \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = 2 - 0 \\
&= 2.
\end{aligned}
$$

$x = -\frac{1}{2}$ Dobijemo $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \cdots = \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}$. To je istinita jednakost, u što se možemo uvjeriti zbrajajući član po član:

$$
\begin{aligned}
&1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{6} \\
&1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4} = \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{12} \\
&1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} = \tfrac{5}{8} = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{24} \\
&1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{11}{16} = \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{48}.
\end{aligned}
$$

Sad uočavamo pravilo (mogli bismo ga i općenito zapisati) i vidimo da se zbrajajući sve više članova približavamo prema $\frac{2}{3}$, malo s lijeva, malo s desna.

$x = -2$ Dobijemo $1 + (-2) + (-2)^2 + (-2)^3 + \cdots = \frac{1}{1-(-2)}$, tj. $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \cdots = \frac{1}{3}$, što nije istinito, jer se zbrajanjem sve više članova, redom dobivaju brojevi 1, -1, 3, -5, 9, -23, 41, $-\ldots$, što se ne približava ni prema jednom broju (nema limesa). Zato -2 nije u području konvergencije.

$x = -1$ Dobijemo $1 + (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots = \frac{1}{1-(-1)}$, tj. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots = \frac{1}{2}$, što nije istinito jer se zbrajanjem sve više članova redom dobivaju brojevi 1, 0, 1, 0, 1, ..., što se ne približava ni prema jednom broju (nema limesa). Zato -1 nije u području konvergencije.
Napomenimo da i u ovoj nekorektnoj jednakosti postoji neki "prikriveni smisao". Naime, pri zbrajanju, član po član, dobivaju se ravnopravno brojevi 1 i 0 što je, u prosjeku, $\frac{1}{2}$. □

Kako se općenito dokazuje da je područje konvergencije geometrijskog reda interval $\langle -1, 1\rangle$ i kako se izvodi formula? Koristeći formulu za zbroj konačnog geometrijskog reda:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}, \quad x \neq 1$$

lako se vidi da geometrijski red ima smisla samo za $-1 < x < 1$ i da mu je zbroj $\frac{1}{1-x}$ jer se za $-1 < x < 1$ potencija x^{n+1} smanjuje sve više (po apsolutnoj vrijednosti) i teži k nuli.

Primjer 12.9. [Taylorov razvoj logaritamske funkcije]
Logaritamska funkcija nije definirana u nuli pa nema razvoja oko nule. Razmotrit ćemo, stoga, razvoj oko $x_0 = 1$. Imamo:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln x & f(1) &= \ln 1 = 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{x} & f'(1) &= \frac{1}{1} = 1 \\
f''(x) &= -\frac{1}{x^2} & f''(1) &= -\frac{1}{1^2} = -1 \\
f'''(x) &= \frac{1\cdot 2}{x^3} & f'''(1) &= \frac{1\cdot 2}{1^3} = 2! \\
f^{IV}(x) &= -\frac{3!}{x^4} & f^{IV}(1) &= -\frac{3!}{1^4} = -3!
\end{aligned}$$

i, općenito:

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} \\
f^{(n)}(1) &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{1^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!.
\end{aligned}$$

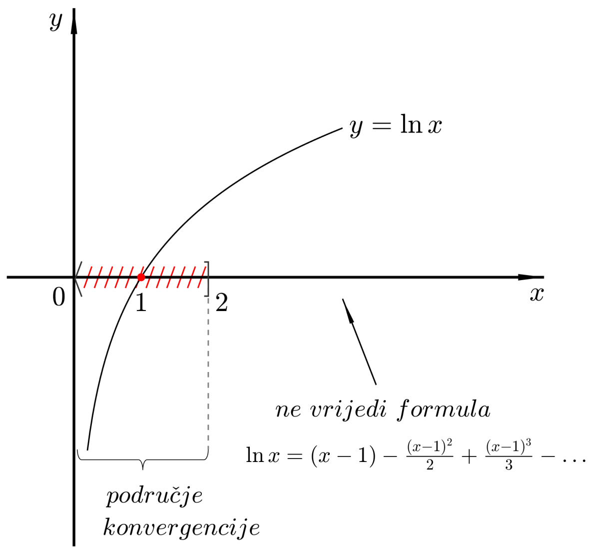
Odavdje dobijemo

$$\begin{aligned}
\ln x &= (x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2!}{3!}(x-1)^3 - \frac{3!}{4!}(x-1)^4 + \dots \\
&= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots
\end{aligned}$$

ili, kraće:

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}.$$

Može se pokazati da je područje konvergencije reda za $0 < x \leqslant 2$. Vidimo da je to za 1 lijevo i desno od sredine intervala, pa broj 1 zovemo radijus konvergencije (Slika 12.9).



Slika 12.9: Primjer 12.9

□

Uočimo da je ovdje područje konvergencije *poluzatvoreni interval*, za razliku od geometrijskog reda, gdje je to bio *otvoreni interval*. Napomenimo, ipak, da uvrštavanje $x = 0$ u razvoj logaritamske funkcije oko 1 *nije bez ikakva smisla*. Naime, dobije se:

$$\ln 0 = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right).$$

Red

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

zove se **harmonijski red**. Nije teško pokazati da je njegova suma $+\infty$ pa gornja jednakost postaje $\ln 0 = -\infty$. To matematički nije potpuno korektno jer u toj jednakosti ne sudjeluju brojevi. Međutim, ta je "jednakost" odraz istinite činjenice da se vrijednosti ln funkcije približavaju $-\infty$ kad se vrijednosti argumenta približavaju k nuli, tj. za $x > 0$ vrijedi

$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty.$$

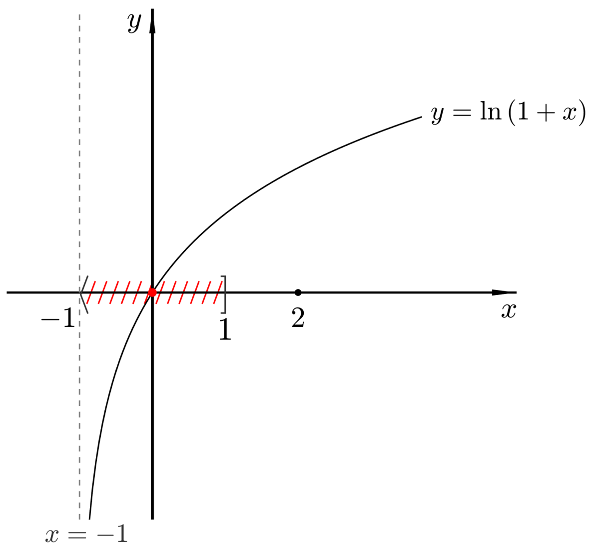
Taylorov red za logaritamsku funkciju često se piše tako da se umjesto x stavi $x + 1$, odnosno umjesto $x - 1$ stavi x. Tako dobijemo Taylorov red oko nule:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

ili, kraće:

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

koji konvergira za $-1 < x \leqslant 1$, Slika 12.10.



Slika 12.10: Područje konvergencije funkcije $f(x) = \ln(1 + x)$

Primjer 12.10. [Taylorov razvoj logaritamske funkcije - nastavak]
Bez korištenja kalkulatora približno izračunajmo $\ln 2$. Uvrstimo $x = 2$ u formulu za razvoj logaritamske funkcije oko 1. Dobijemo

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Uočavamo da nam je potrebno zbrojiti mnogo članova (to je zato što je red *alternativan* - izmjenjuju mu se predznaci) - kažemo da *sporo konvergira*.
Koristeći se svojstvima logaritamske funkcije to možemo izbjeći ovako:

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1}{2}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}\\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}.\end{aligned}$$

Sad, koristeći da je $\ln\frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$, dobijemo

$$\begin{aligned}\ln 2 &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 8} + \frac{1}{4\cdot 16} + \dots\\ &\approx \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \frac{1}{160} = \frac{661}{960}\\ &\approx 0.69.\end{aligned}$$

Dakle, zbrajanjem prvih 5 članova, dobili smo $\ln 2 \approx 0.69$, što je točno na dvije decimale. S prvih 5 članova alternativnog reda dobili bismo puno slabije:

$$\ln 2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} \approx 0.78.$$

□

12.4 PRIMJENA MATLAB-A

12.4.1 Taylorov polinom. Naredba `taylor`

Naredba `taylor` daje prvih šest članova Taylorovog reda, tj. Taylorov polinom petog stupnja funkcije oko nule. Kako bi rezultat inače bio zapisan kao polinom u kojem potencije idu od najviše prema nižima, koristimo naredbu `sympref` kojom zadajemo da se polinom ispiše od najniže potencije prema višima, kako je i uobičajeno kod računa aproksimacije. Pokažimo to na primjeru razvoja funkcije $f(x) = e^x$:

```
syms x
f = exp(x)
sympref('PolynomialDisplayStyle','ascend')
taylor(f)          % 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 + x^5/120
```

Puni zapis formule `taylor(f(x), 'ExpansionPoint', x0, 'Order', n)` daje prvih n članova Taylorovog reda funkcije f oko $x0$, tj. Taylorov polinom s n članova i stupnja (najviše) $n-1$. Na primjer, za dobivanje prva četiri člana Taylorova razvoja funkcije $f(x) = \ln x$ oko jedinice pišemo:

```
syms x
f = log(x)
taylor(f, 'ExpansionPoint', 1, 'Order', 4)
```

```
ans(x) = x - (x - 1)^2/2 + (x - 1)^3/3 - 1
```

Na kraju rezultata nalazi se -1 koju treba pridružiti elementu x da bi se dobio uobičajeni zapis $x - 1 - (x-1)^2/2 + (x-1)^3/3$.

12.4.2 Linearna i kvadratna aproksimacija funkcije

Kod linearne aproksimacije potrebno je u naredbi `taylor` zadati $n = 2$ jer je funkcija linearne aproksimacije jednaka zbroju prva dva člana Taylorovog reda. Uvjerimo se u to na funkciji $f(x) = \sqrt{x}$:

```
syms x
f(x) = sqrt(x)
x0 = 100
lin(x) = taylor(f, 'ExpansionPoint', x0, 'Order', 2)
```

```
lin(x) = x/20 + 5
```

Može se lako provjeriti da je rezultat jednak onomu iz Primjera 12.2. Odredimo približnu vrijednost od $\sqrt{99}$ i usporedimo tu vrijednost sa stvarnom vrijednošću te izračunajmo pogrešku aproksimacije. Koristimo naredbu `vpa` (kratica za *variable-precision arithmetic*) za numerički prikaz rezultata proizvoljne preciznosti, zajedno s naredbom `digits` kojom zadajemo preciznost prikaza na najviše 10 znamenaka različitih od nule:

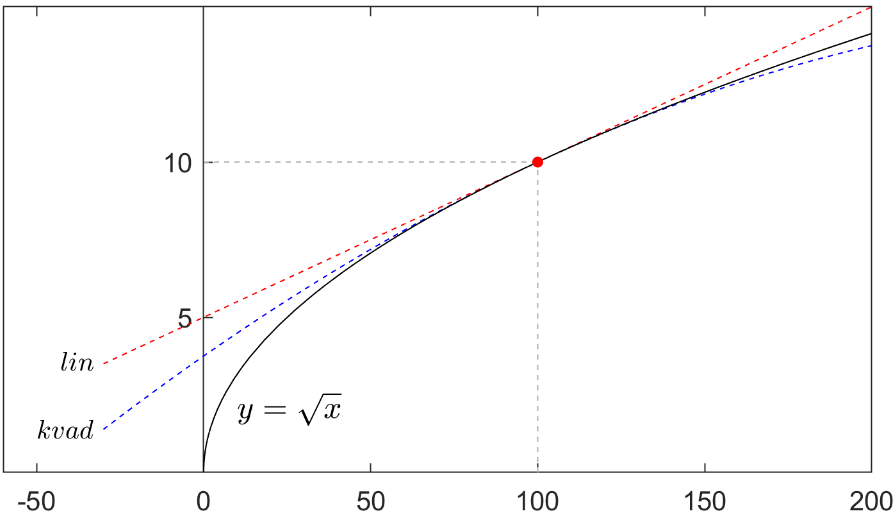
```
c = 99
digits(10)
vpa(f(c))                                        % 9.949874371
vpa(lin(c))                                             % 9.95
pogreska_lin = vpa(f(c) - lin(c))          % -0.0001256289338
```

Slično kao i kod linearne aproksimacije, do kvadratne aproksimacije možemo doći pomoću naredbe `taylor`, uz vrijednost argumenta `'Order'` jednaku $n = 3$:

```
syms x
f(x) = sqrt(x)
x0 = 100
kvad(x) = taylor(f, 'ExpansionPoint', x0, 'Order', 3)
c = 99
digits(10)
vpa(f(c))                                          % 9.949874371
vpa(kvad(c))                                          % 9.949875
pogreska_kvad = vpa(f(c) - kvad(c))     % -0.0000006289338005
```

```
kvad(x) = x/20 - (x - 100)^2/8000 + 5
```

I opet, može se provjeriti da je rezultat jednak onomu iz Primjera 12.4. Tangenta na graf funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ u točki $(99, \sqrt{99})$ definirana je funkcijom `lin(x)` linearne aproksimacije funkcije f, a graf funkcije kvadratne aproksimacije s `kvad(x)`. Prikažimo grafove aproksimacija prvog i drugog reda, zajedno s grafom funkcije f:



12.4.3 Aproksimacije višeg reda

Pokažimo na Primjeru 12.5 kako se radi s aproksimacijama višeg reda. Računamo približnu vrijednost konstante $e = e^1$ koristeći prvih pet aproksimacija funkcije $f(x) = e^x$ oko $x_0 = 0$. U tu ćemo svrhu upotrijebiti naredbu `for ... end` jer nam za dobivanje većeg broja aproksimacija treba iterativni postupak, tj. *"petlja"*:

```
syms x
f(x) = exp(x)
c = 1
n = 5
aproksimacija = zeros(1, n)
pogreske = zeros(1, n)
for ind = 1:n
```

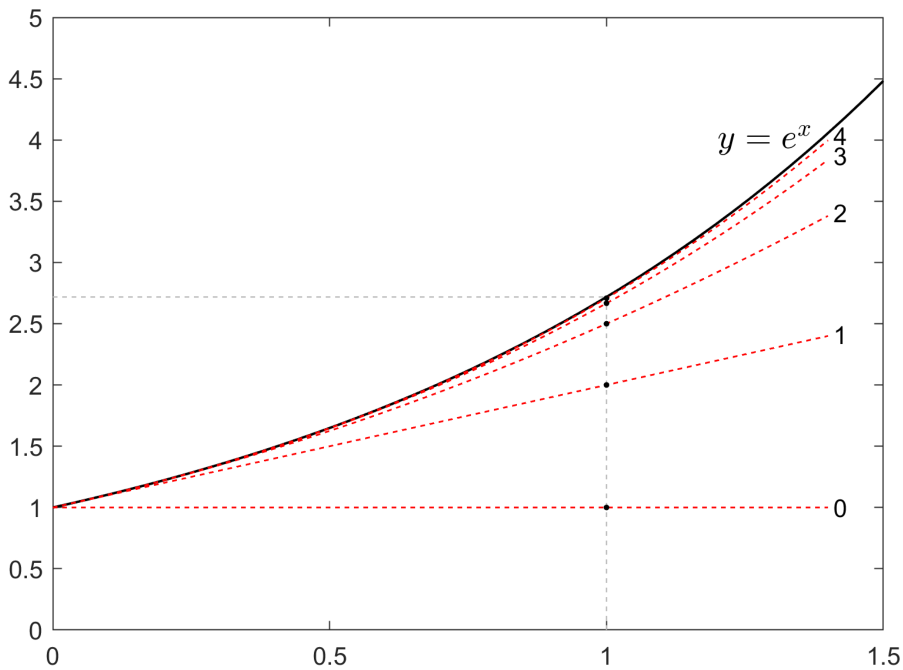
```
   T(x) = taylor(f(x), 'Order', ind)
   aproksimacija(1, ind) = T(c)
   pogreska(1, ind) = double(exp(c) - T(c))
end
```

```
aproksimacija =  1.0000   2.0000   2.5000   2.6667   2.7083
pogreska      =  1.7183   0.7183   0.2183   0.0516   0.0099
```

Rezultate smo spremili u vektore približnih vrijednosti za e, odnosno pogrešaka aproksimacija. Te vektore smo inicijalizirali naredbom `zeros` prije same petlje. Ukoliko želimo doći do n-te aproksimacije i pripadne pogreške, koristimo naredbu za dobivanje odgovarajućeg elementa gornjih vektora. Na primjer, sljedećom naredbom dolazimo do vrijednosti druge aproksimacije, tj. pripadne pogreške:

```
aproksimacija(:, 3)                                   % 2.5000
pogreska(:, 3)                                        % 0.2183
```

Naredba `for ... end` može poslužiti i za dobivanje grafičkog prikaza na kojem se nalazi puno grafova. Na slici su prikazane izračunate aproksimacije, gdje je brojkom uz graf naznačen red aproksimacije, tj. stupanj aproksimacijskog polinoma:



12.5 PITANJA I ZADATCI

1. Odredite pravilo za n-tu derivaciju funkcija sin i cos u ovisnosti o prirodnom broju n. Uputa: rezultat ovisi o ostatku pri dijeljenju broja n s 4.

2. Što se dobije kad se u formulu za linearnu aproksimaciju funkcije stavi $\Delta x = 0$, odnosno $x = x_0$ u alternativnoj formuli?

3. Neka je $f(2) = -1$ i $f'(2) = 3$. Napišite oba izraza za linearnu aproksimaciju funkcije f oko 2. Što je varijabla u tom izrazu?

4. Što je u formuli za linearnu aproksimaciju fiksirano, a što promjenjivo (varijabla)? Odgovorite za obje formule. Što je za kvadratnu aproksimaciju?

5. Neka je $f(2) = -1$, $f'(2) = 3$ i $f''(2) = 1$. Napišite oba izraza za kvadratnu aproksimaciju funkcije f oko 2.

6. Napišite formulu za Taylorov razvoj funkcije $f(x) := \frac{1}{1+x}$ oko nule:
   (i) pomoću formule za Taylorov red
   (ii) koristeći se poznatim redom za $\frac{1}{1-x}$ (geometrijski red).

7. Odredite zbroj $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$. Uputa: napišite formulu za geometrijski red, potom derivirajte obje strane (geometrijski red derivirajte član po član).

8. Deriviranjem član po član Taylorova reda potvrdite da je $(e^x)' = e^x$.

9. Deriviranjem član po član Taylorova reda potvrdite da je $(\sin x)' = \cos x$ i $(\cos x)' = -\sin x$.

10. Koristeći se Taylorovim redom potvrdite da je $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ i $\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$.

13 ANALIZA SVOJSTAVA FUNKCIJE POMOĆU DERIVACIJA

U lekciji se daju kriteriji pomoću derivacija za rast i pad funkcije, lokalne ekstreme (točke prijelaza iz rasta u pad i obratno), konveksnost i konkavnost, točke infleksije (točke prijelaza iz konveksnosti u konkavnost i obratno). Ti su kriteriji prirodni, jer derivacije imaju jasna fizikalna značenja: prva derivacija značenje brzine, a druga značenje ubrzanja.

13.1 PRIPADNI PROBLEM

Osnovna pitanja koja se mogu postaviti o ponašanju neke funkcije jesu:

1. Raste li ili pada funkcija oko neke vrijednosti argumenta?
2. Postiže li funkcija svoju najveću ili najmanju vrijednost za neku vrijednost argumenta?
3. Je li funkcija konveksna ili konkavna oko neke vrijednosti argumenta?
4. Ima li funkcija infleksiju za neku vrijednost argumenta (tj. mijenja li konveksnost i konkavnost pri prolazu argumenta kroz tu vrijednost)?

U svim ovim pitanjima govorimo o ponašanju funkcije *oko neke vrijednosti argumenta*, recimo x_0. Što znači "malo lijevo, malo desno" od x_0? To znači da trebamo odgovoriti na pitanje za beskonačno mnogo vrijednosti argumenta, što je nemoguće ako to doslovno shvatimo. Matematički se taj problem rješava tako da se gledaju vrijednosti samo u x_0, ali ne samo vrijednosti funkcije već i vrijednosti njenih derivacija u x_0. U *većini slučajeva*, gornja četiri problema riješit ćemo *samo iz poznavanja vrijednosti prve i druge derivacije funkcije u* x_0. Općenito, četiri gornja problema svode se na rješavanje jednadžba i nejednadžba.

Ova četiri pitanja o funkcijama imaju veliku važnost u inženjerstvu pri proučavanju, praćenju i opisivanju veze među dvjema veličinama u nekom procesu, reakciji. Na primjer, ako razmatramo vrijednost neke veličine y nastale u nekom procesu, u ovisnosti o vremenu t, onda ova pitanja imaju sljedeću interpretaciju:

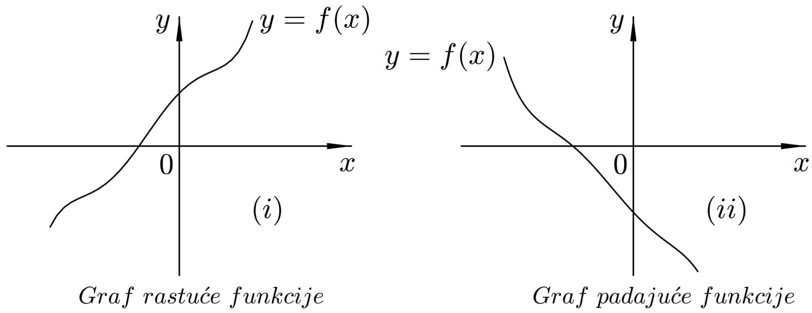
1. Povećava li se ili smanjuje vrijednost veličine y u nekom vremenskom intervalu oko trenutka t_0?
2. Je li vrijednost veličine y maksimalna ili minimalna u nekom trenutku t_0?
3. Raste li ubrzano ili usporeno vrijednost veličine y, u nekom vremenskom intervalu oko t_0 (ako raste i, slično, ako vrijednost od y pada)?
4. Prelazi li promjena veličine y u nekom trenutku od ubrzanja na usporenje ili obratno?

13.2 POTREBNO PREDZNANJE

Potrebno je poznavati pojam i interpretaciju derivacije funkcija (naročito prvu i drugu). Također je važna jasna predodžba o ponašanju kvadratne funkcije.

Ponovimo potrebne definicije i činjenice:

1. **Rast i pad funkcije** - funkcija je:
   (i) **rastuća**, ako se s povećavanjem vrijednosti argumenta povećavaju i vrijednosti funkcije. Geometrijski, to znači da se graf funkcije, gledajući od lijeva na desno, uspinje (raste), Slika 13.1 (i)
   (ii) **padajuća**, ako se s povećavanjem vrijednosti argumenta vrijednosti funkcije smanjuju. Geometrijski, to znači da se graf funkcije, gledajući od lijeva na desno, spušta (pada), Slika 13.1 (ii).

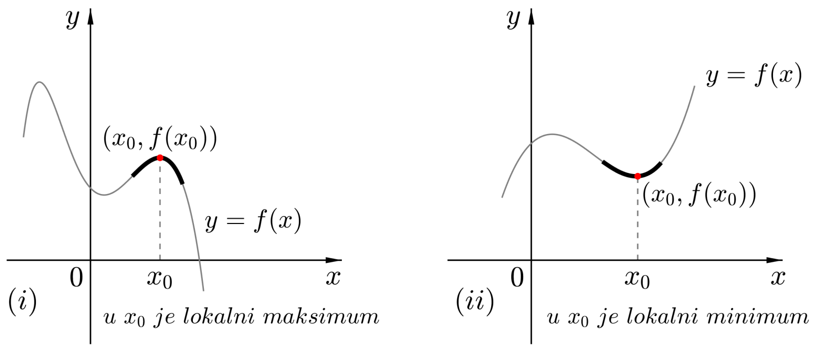


Slika 13.1: Graf rastuće, odnosno padajuće funkcije

2. **Lokalni ekstremi funkcije** - kažemo da je točka x_0:
   (i) **točka lokalnog maksimuma** funkcije f ili da f u x_0 postiže lokalni maksimum, ako je $f(x_0)$ najveća vrijednost funkcije f na nekom (otvorenom) intervalu oko x_0, tj. malo lijevo,

malo desno od x_0. Ako je tako, onda se $f(x_0)$ zove lokalni maksimum. Netko tada i točku $(x_0, f(x_0))$ zove točkom lokalnog maksimuma, Slika 13.2 (i)

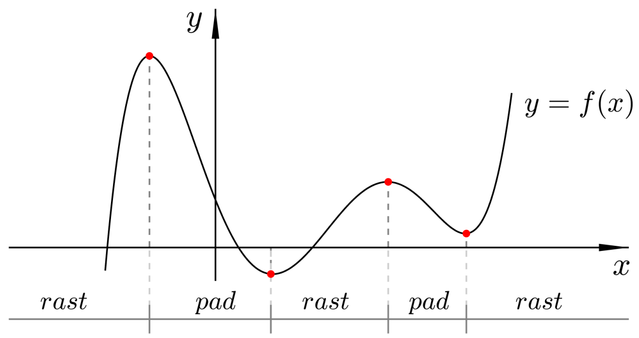
(ii) **točka lokalnog minimuma** funkcije f ili da f u x_0 postiže lokalni minimum, ako je $f(x_0)$ najmanja vrijednost funkcije f na nekom (otvorenom) intervalu oko x_0, tj. malo lijevo, malo desno od x_0. Ako je tako, onda se $f(x_0)$ zove lokalni minimum. Netko tada i točku $(x_0, f(x_0))$ zove točkom lokalnog minimuma, Slika 13.2 (ii).



Slika 13.2: Točka lokalnog maksimuma, odnosno minimuma funkcije

Kažemo da je x_0 **točka lokalnog ekstrema** funkcije ili da funkcija u x_0 ima lokalni ekstrem, ako je x_0 točka lokalnog maksimuma ili lokalnog minimuma te funkcije.

3. **Interval rasta (pada)** funkcije jest svaki interval unutar domene funkcije na kojemu graf funkcije raste (pada) - Slika 13.3.



Slika 13.3: Intervali rasta i pada funkcije

4. **Važna interpretacija lokalnih ekstrema** pomoću intervala (područja) rasta, odnosno pada funkcije - funkcija postiže:

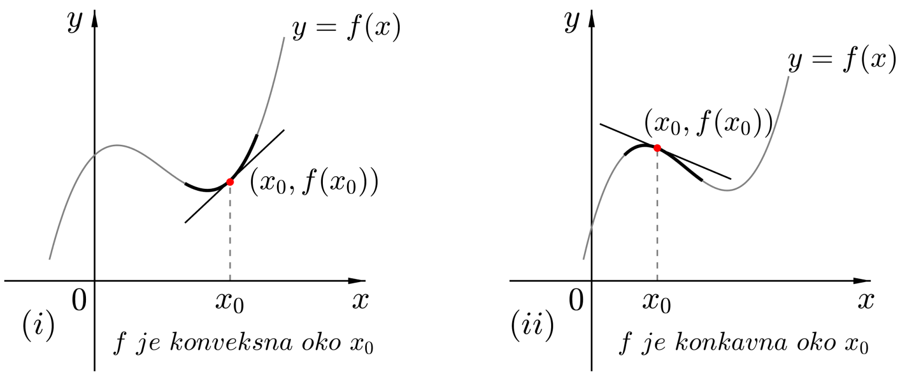
   (i) lokalni maksimum u x_0 ako, pri prolazu argumenta kroz x_0, funkcija iz područja rasta prelazi u područje pada, tj. ako malo lijevo od x_0 funkcija raste, a malo desno od x_0 pada

(ii) lokalni minimum u x_0 ako, pri prolazu argumenta kroz x_0, funkcija iz područja pada prelazi u područje rasta, tj. ako malo lijevo od x_0 funkcija pada, a malo desno od x_0 raste.

5. **Konveksnost i konkavnost funkcije** - funkcija f je:

   (i) **konveksna** u x_0 ako je tangenta na graf u točki $(x_0, f(x_0))$ ispod grafa, potpuno ili na jednom dijelu oko te točke, Slika 13.4 (i)

   (ii) **konkavna** u x_0 ako je tangenta na graf u točki $(x_0, f(x_0))$ iznad grafa, potpuno ili na jednom dijelu oko te točke, Slika 13.4 (ii).

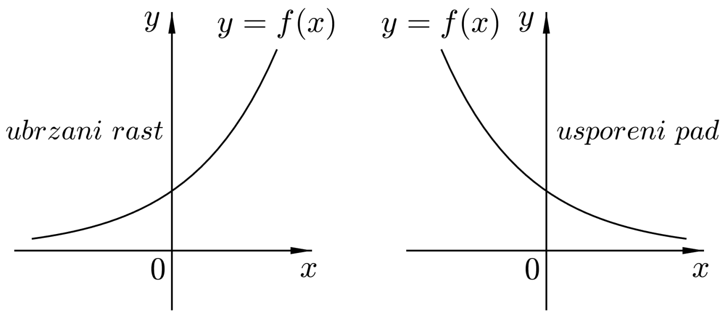


Slika 13.4: Konveksnost i konkavnost funkcije

To je geometrijska definicija. Postoji i analitička, ali je tu nećemo spominjati. Također, kažemo da je funkcija konveksna (konkavna) na nekom intervalu ako je ona konveksna (konkavna) u svakoj točki tog intervala.

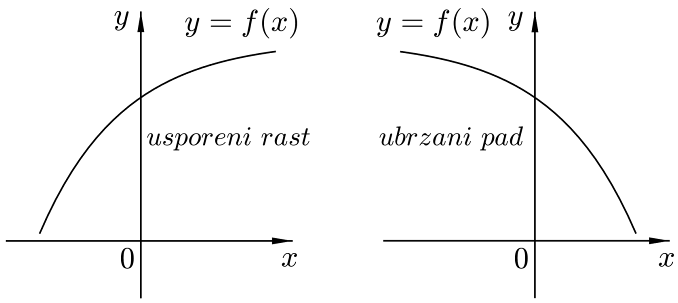
6. **Važna interpretacija konveksnosti (konkavnosti)** pomoću rasta, odnosno pada funkcije - funkcija je:

   (i) konveksna ako ubrzano raste (u smislu da se, za jednaka povećanja vrijednosti argumenta, vrijednost funkcije povećava za sve veće iznose) ili usporeno pada (u smislu da se, za jednaka povećanja vrijednosti argumenta, vrijednost funkcije smanjuje za sve manje iznose), Slika 13.5



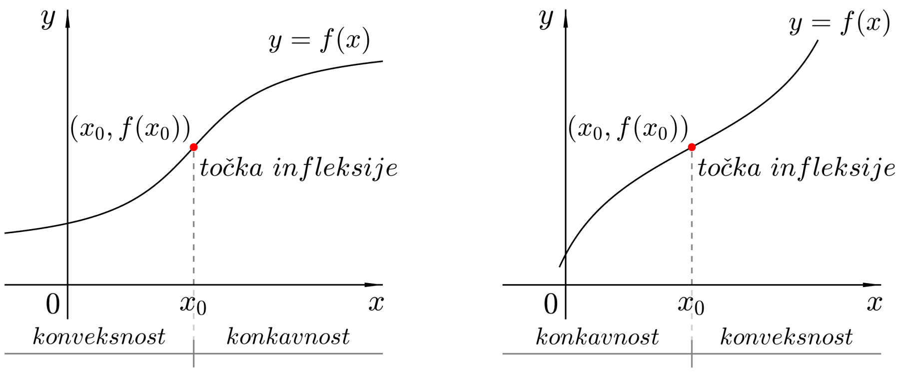
Slika 13.5: Konveksnost kao ubrzani rast ili usporeni pad

(ii) konkavna ako usporeno raste (u smislu da se, za jednaka povećanja vrijednosti argumenta, vrijednost funkcije povećava za sve manje iznose) ili ubrzano pada (u smislu da se, za jednaka povećanja vrijednosti argumenta, vrijednost funkcije smanjuje za sve veće iznose), Slika 13.6.



Slika 13.6: Konkavnost kao usporeni rast ili ubrzani pad

7. **Točke infleksije** - kažemo da je x_0 **točka infleksije** funkcije f ako, pri prolazu argumenta kroz x_0, funkcija prelazi iz područja konveksnosti u područje konkavnosti ili obratno. Ako je tako, onda se točka $(x_0, f(x_0))$ zove točka infleksije grafa (Slika 13.7).



Slika 13.7: Točka infleksije za rastuće funkcije

13.3 NOVE DEFINICIJE I TVRDNJE S PRIMJERIMA

13.3.1 Kriteriji rasta i pada

Kriterij rasta:

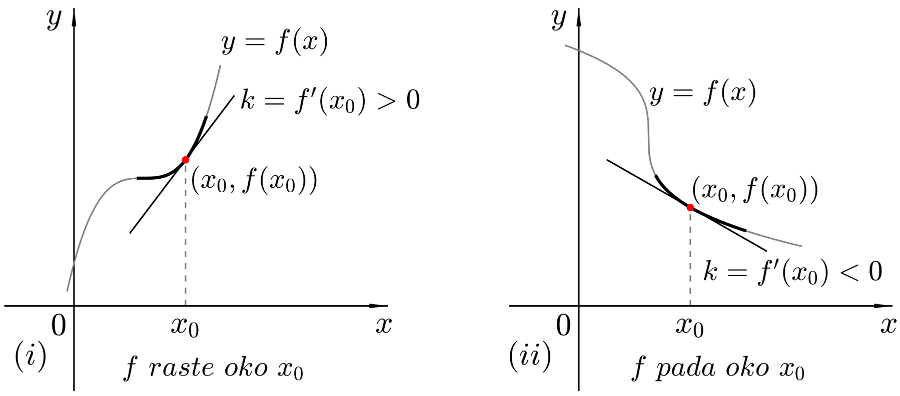
$$\text{Ako je } f'(x_0) > 0, \text{ onda } f \text{ raste oko } x_0.$$

Postoji i strog, analitički dokaz te tvrdnje, a mi ovdje dajemo geometrijsko objašnjenje (Slika 13.8 (i)): $f'(x_0)$ je koeficijent smjera tangente na graf funkcije f u $(x_0, f(x_0))$. Zato: ako je $f'(x_0) > 0$, onda je prikloni kut tangente šiljast, tj. tangenta je rastuća pa zaključujemo da je funkcija f rastuća oko x_0.

Kriterij pada:

$$\text{Ako je } f'(x_0) < 0, \text{ onda } f \text{ pada oko } x_0.$$

Objašnjenje je analogno onome za rast, samo što je tu prikloni kut tangente tup (Slika 13.8 (ii)).

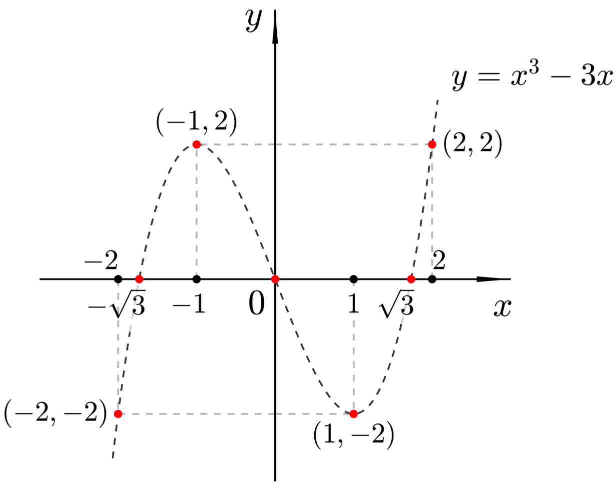


Slika 13.8: Kriteriji rasta i pada

Primjer 13.1. [Primjena kriterija rasta i pada]
Odredimo intervale rasta i pada, i lokalne ekstreme funkcije $f(x) := x^3 - 3x$ te skicirajmo graf.
Iako to nije nužno, najprije odredimo nekoliko točaka grafa, da bismo dobili neku predodžbu o funkciji. Pođimo od točaka u kojima graf siječe x-os, tj. odredimo **nultočke** funkcije f tako da riješimo jednadžbu

$$x^3 - 3x = 0$$
$$x(x^2 - 3) = 0$$

pa su rješenja $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$ i $x_3 = \sqrt{3}$. Ucrtavanjem još nekoliko točaka, dobivamo *grubu predodžbu* o grafu funkcije f, Slika 13.9.



x	y
-2	-2
$-\sqrt{3}$	0
-1	2
0	0
1	-2
$\sqrt{3}$	0
2	2

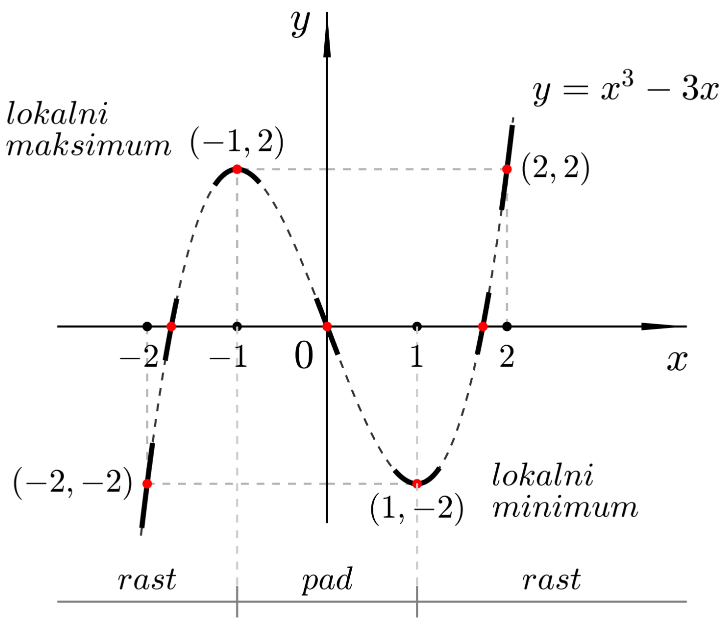
Slika 13.9: Primjer 13.1

Uočavamo da bi f trebala imati točku lokalnog maksimuma x_{max} negdje između $-\sqrt{3}$ i 0 te točku lokalnog minimuma x_{min} negdje između 0 i $\sqrt{3}$. Treba odrediti točno x_{max} i x_{min}.
Tu je $f'(x) = 3x^2 - 3$. Odredimo područja pada i rasta. Pođimo od područja pada jer je tu tako jednostavnije, ali mogli smo poći i od područja rasta: $f'(x) < 0$, odakle slijedi $3x^2 - 3 < 0$, tj. $x^2 < 1$, dakle $-1 < x < 1$.

Zaključujemo:

1. Funkcija pada za $-1 < x < 1$, tj. $< -1, 1 >$ je *interval pada*.
2. Funkcija raste za $x < -1$ i za $x > 1$, tj. $\langle -\infty, -1\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$ su *intervali rasta*. Uočimo da smo ta dva intervala dobili izravno, kao komplementarne otvorene intervale, intervalu pada.
3. (i) U $x = -1$ funkcija prelazi iz područja rasta u područje pada pa je $x_{max} = -1$. Kako je $f(-1) = 2$, točka $(-1, 2)$ je točka lokalnog maksimuma grafa. To se obično zapisuje kao:
$$(x_{max}, y_{max}) = (-1, 2)$$
   (ii) U $x = 1$ funkcija prelazi iz područja pada u područje rasta pa je $x_{min} = 1$. Kako je $f(1) = -2$, točka $(1, -2)$ je točka lokalnog minimuma grafa. To se obično zapisuje kao:
$$(x_{min}, y_{min}) = (1, -2).$$

Sad možemo malo preciznije skicirati graf funkcije (Slika 13.10).



Slika 13.10: Primjer 13.1

Napomenimo da još ne možemo biti zadovoljni jer još uvijek ne znamo točno područja konveksnosti i konkavnosti, odnosno točke infleksije (iako ih naziremo otprilike). Napomenimo također da smo područja rasta i pada kao i lokalne ekstreme mogli odrediti bez ikakva crtanja, dovoljno je bilo riješiti nejednadžbu $f'(x) < 0$ ili nejednadžbu $f'(x) > 0$. □

13.3.2 Kriteriji konveksnosti i konkavnosti

Kriterij konveksnosti:

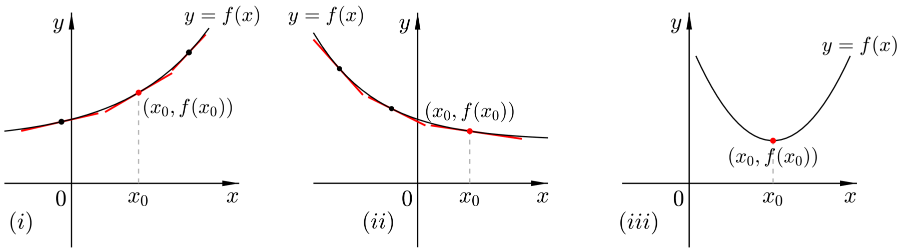
Ako je $f''(x_0) > 0$, onda je f konveksna oko x_0.

Iako postoji i strogi analitički dokaz, dat ćemo geometrijsko obrazloženje, tj. **geometrijsku interpretaciju druge derivacije**: ako je $f''(x_0) > 0$, onda derivacija f' raste oko x_0, zbog kriterija rasta i zbog toga što je $f'' = (f')'$. Mogu nastupiti sljedeće mogućnosti:

(i) f raste oko x_0 pa zato ubrzano raste (jer joj se derivacija povećava), pa je konveksna, Slika 13.11 (i)

(ii) f pada oko x_0 pa zato usporeno pada, pa je konveksna, Slika 13.11 (ii)

(iii) f ima lokalni ekstrem u x_0 pa zato taj ekstrem mora biti minimum, pa je f opet konveksna, Slika 13.11 (iii).

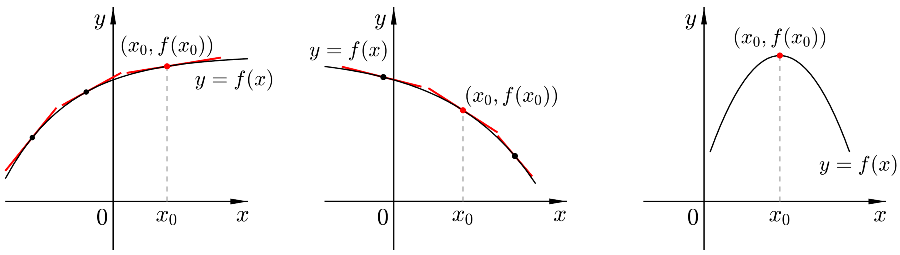


Slika 13.11: Kriterij konveksnosti: $f''(x_0) > 0$

Kriterij konkavnosti:

Ako je $f''(x_0) < 0$, onda je f konkavna oko x_0.

Obrazloženje je analogno onome za konveksnost (Slika 13.12).



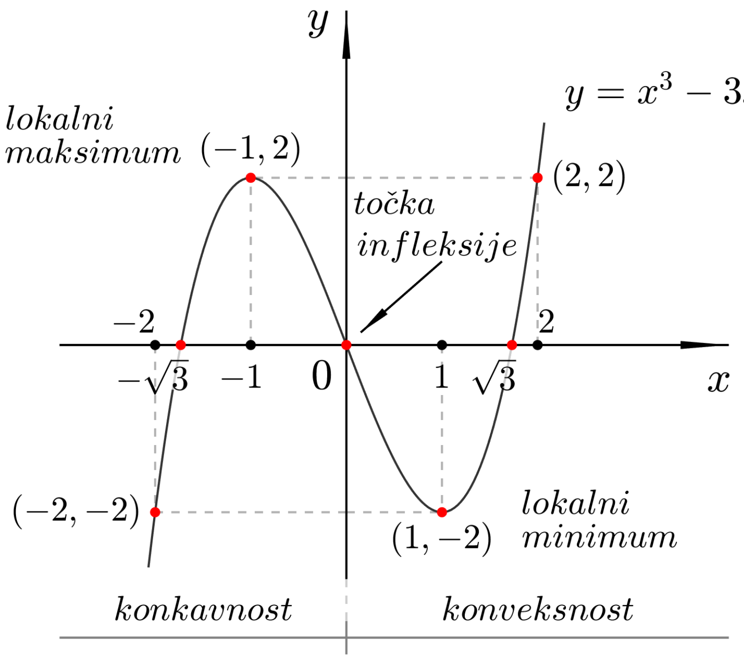
Slika 13.12: Kriterij konkavnosti: $f''(x_0) < 0$

Primjer 13.2. [Primjena kriterija konveksnosti i konkavnosti]
Skicirajmo graf funkcije $f(x) := x^3 - 3x$. Već smo u Primjeru 13.1 odredili nultočke, intervale rasta i pada i lokalne ekstreme. Ostaje odrediti intervale konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije.
Tu je $f(x) := x^3 - 3x$, $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$. Iz kriterija konveksnosti $f''(x) > 0$ dobivamo $6x > 0$, tj. $x > 0$.

Zato:

1. f je konveksna za $x > 0$
2. f je konkavna za $x < 0$
3. u $x_0 = 0$ je točka infleksije jer u toj točki f prelazi iz područja konkavnosti u područje konveksnosti.

Sad graf možemo skicirati preciznije (Slika 13.13).



Slika 13.13: Primjer 13.2

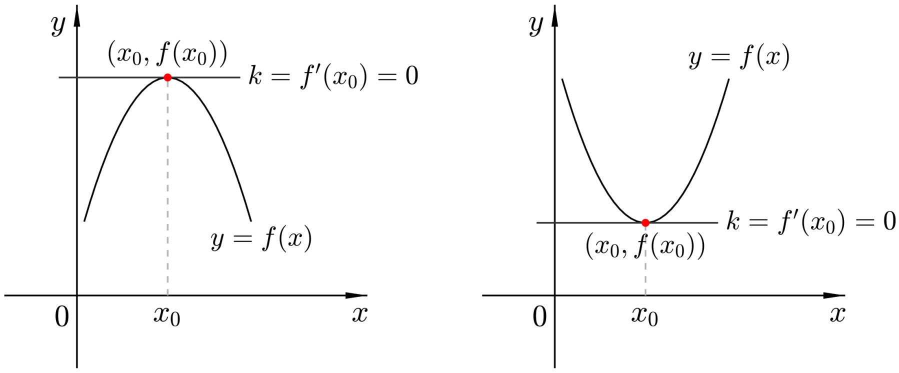
$\square$

13.3.3 Izravni kriteriji lokalnog ekstrema

Nužni uvjet lokalnog ekstrema:

> Ako je u x_0 lokalni ekstrem, onda je $f'(x_0) = 0$,
> tj. tangenta u točki $(x_0, f(x_0))$ usporedna je s $x-$osi.

Postoji i strog analitički dokaz, a geometrijsko je obrazloženje očito (Slika 13.14).



Slika 13.14: Nužni uvjet lokalnog ekstrema

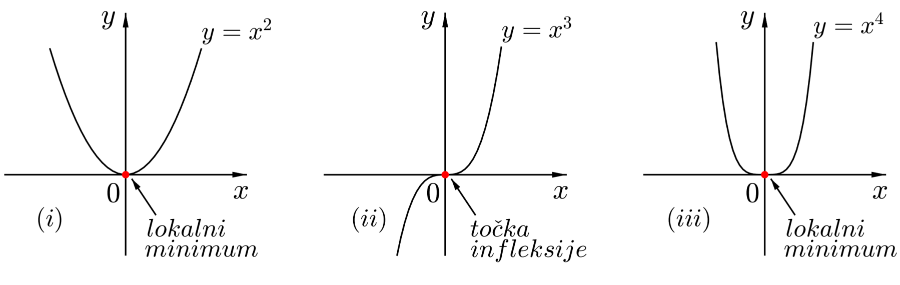
Važna napomena: uvjet $f'(x_0) = 0$ *je nužan, ali općenito ne i dovoljan da bi* x_0 *bio lokalni ekstrem.* To u praksi znači da, ako želimo odrediti sve lokalne ekstreme neke funkcije, jedan od pristupa jest da riješimo jednadžbu $f'(x) = 0$. Tada su lokalni ekstremi među rješenjima te jednadžbe, ali može se dogoditi da neka rješenja ne budu lokalni ekstremi već točke infleksije. To ilustriramo sljedećim primjerom.

Primjer 13.3. [Nužni uvjet lokalnog ekstrema]
Potencija $f(x) = x^n$ u $x_0 = 0$ ima minimum za parne, a točku infleksije za neparne n (osim za $n = 1$). Uočimo da za $n > 1$ vrijedi $f'(0) = 0$.

(i) za $f(x) = x^2$ je $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$. U $x_0 = 0$ je točka lokalnog minimuma te vrijedi $f'(0) = 0$ i $f''(0) = 2 > 0$, Slika 13.15 (i)

(ii) za $f(x) = x^3$ je $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$. U $x_0 =$ je točka infleksije i vrijedi $f'(0) = f''(0) = 0$ i $f'''(0) = 6 \neq 0$, Slika 13.15 (ii)

(iii) za $f(x) = x^4$ je $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f'''(x) = 24x$, $f^{IV} = 24$. U x_0 je točka lokalnog minimuma i vrijedi $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ te $f^{IV}(0) \neq 0$, Slika 13.15 (iii).



Slika 13.15: Primjer 13.3

□

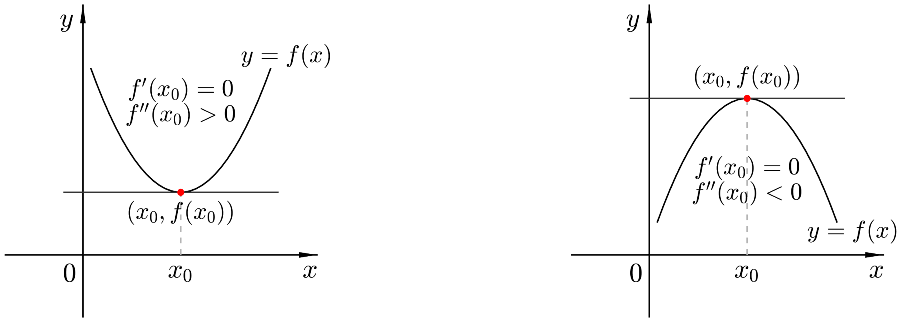
Svaki x_0 za koji je $f'(x_0) = 0$ zove se **stacionarna** ili **kritična točka** od f.

Dovoljni uvjeti lokalnog ekstrema:

(i) Ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$, onda je u x_0 lokalni minimum.

(ii) Ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$, onda je u x_0 lokalni maksimum.

Iako postoji i strog analitički dokaz, mi dajemo geometrijsko obrazloženje (Slika 13.16).



Slika 13.16: Dovoljni uvjeti lokalnog ekstrema

Primjer 13.4. [Primjena kriterija nužnog i dovoljnog uvjeta lokalnog ekstrema]
Odredimo lokalne ekstreme funkcije $f(x) = x^3 - 3x$. Napomenimo da smo već u Primjeru 13.1 pokazali, primjenom kriterija rasta i pada, da je $x_{max} = -1$ i $x_{min} = 1$. Sad ćemo to dobiti izravno iz kriterija lokalnog ekstrema.
Tu je $f(x) := x^3 - 3x$, $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$:

1. Nužan uvjet lokalnog ekstrema:
   $f'(x) = 0$
   $3x^2 - 3 = 0$
   $x_1 = -1, x_2 = 1$

2. Dovoljan uvjet lokalnog ekstrema:
   $f''(x_1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0$ pa je u $x = -1$ lokalni maksimum.
   $f''(x_2) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$ pa je u $x = 1$ lokalni minimum. □

Poopćenje kriterija lokalnog ekstrema: ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) = 0$, onda je:

(i) ako je $f'''(x_0) \neq 0$, onda je u x_0 točka infleksije

(ii) ako je i $f'''(x_0) = 0$, onda je:

   (a) ako je $f^{IV}(x_0) < 0$, onda je u x_0 lokalni maksimum

   (b) ako je $f^{IV}(x_0) > 0$, onda je u x_0 lokalni minimum

   (c) ako je $f^{IV}(x_0) = 0$, onda analogno treba gledati petu, odnosno šestu derivaciju itd.

Uočimo da je u svim slučajevima bilo $f'(x_0) = 0$, tj. x_0 je stacionarna (kritična) točka od f. U nekim slučajevima ta je točka bila točka lokalnog ekstrema od f, a u drugima točka infleksije. Za funkcije koje mi razmatramo, stacionarna točka uvijek će biti ili točka lokalnog ekstrema ili točka infleksije.

Primjer 13.5. [Primjena poopćenog kriterija lokalnog ekstrema] Odredimo lokalne ekstreme funkcije $f(x) = x^5 - 5x^3$. Tu je $f'(x) = 5x^4 - 15x^2$, $f''(x) = 20x^3 - 30x$, $f'''(x) = 60x^2 - 30$.

1. $f'(x) = 0$
   $5x^4 - 5x^2 = 0$
   $x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$

2. (i) $f''(x_1) = 20(-1)^3 - 30(-1) = 10 > 0$ pa je u $x = -1$ lokalni minimum

   (ii) $f''(x_2) = 20 \cdot 0^3 - 30 \cdot 0 = 0$ pa treba nastaviti s višim derivacijama: $f'''(x_2) = 60 \cdot 0^2 - 30 = -30 \neq 0$ pa je u $x = 0$ točka infleksije

   (iii) $f''(x_3) = 20 \cdot 1^3 - 30 \cdot 1 = -10 < 0$ pa je u $x = 1$ lokalni maksimum.

□

13.3.4 Fizikalna značenja lokalnih ekstrema, druge derivacije i točaka infleksije

Funkcijskom vezom $y = f(x)$ opisano je kako se mijenja druga veličina y u ovisnosti o promjeni prve veličine x. Zato:

1. $f'(x)$ je *brzina* kojom se mijenja y pri promjeni vrijednosti x prve veličine.

2. U lokalnim ekstremima brzina je jednaka nuli.

3. $f''(x)$ je *akceleracija* promjene druge veličine pri promjeni vrijednosti x prve veličine. To je zato što je $f'' = (f')'$, tj. f'' je brzina promjene brzine.

4. U točkama infleksije ubrzanje prelazi u usporenje i obratno.

Pojasnimo potanje ovo u terminima gibanje čestice po koordinatnoj s-osi u vremenu t. Tu je:

> s(t) koordinata položaja čestice u trenutku t (kraće, položaj u trenutku t)
>
> $v(t) := s'(t)$ brzina čestice u trenutku t (prema definiciji trenutne brzine). Ako je $v(t) > 0$, onda se u trenutku t čestica giba u pozitivnom, a ako je $v(t) < 0$, u negativnom smjeru s-osi.

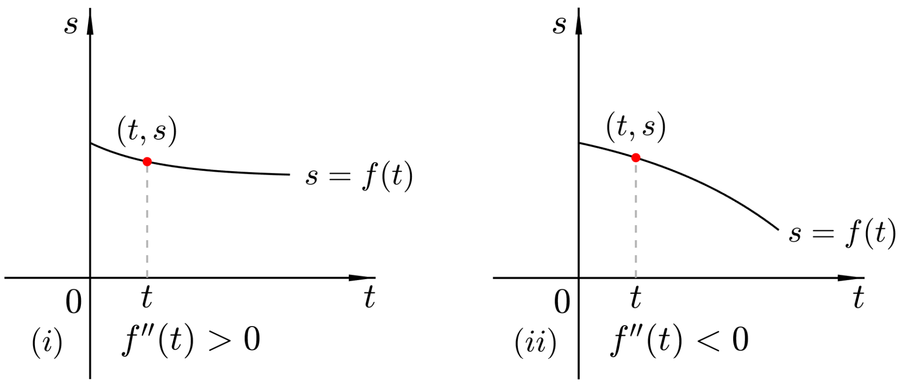
$a(t) := v'(t) = s''(t)$ akceleracija (ubrzanje) čestice u trenutku t. Ako je $a(t) > 0$, onda je gibanje ubrzano u trenutku t, a ako je $a(t) < 0$ (negativno ubrzanje), gibanje je usporeno.

Ako je brzina pozitivna, onda je sve u skladu s uobičajenom intuicijom, ali ako je negativna, odnosno ako se gibanje odvija u negativnom smjeru s-osi, onda može doći do nesporazuma. To je uzrokovano relacijom uređaja na negativnim brojevima: negativan broj je to veći što mu je apsolutna vrijednost manja.
Tako, ako je brzina negativna, $s'(t) < 0$, a gibanje ubrzano, $s''(t) > 0$, onda brzina raste. Kad negativni brojevi rastu, onda im se smanjuje apsolutna vrijednost pa to u terminima brzine znači da se brzina po apsolutnoj vrijednosti smanjuje. U terminima vrijednosti $s(t)$ ovdje je riječ o padu, ali taj je pad sve sporiji pa govorimo o usporenom padu. Dakle, ako se govori u terminima gibanja na s-osi, ono je ubrzano jer je $s''(t) > 0$, ali kad govorimo u terminima pada vrijednosti $s(t)$, onda je to usporeni pad. To još dalje pojašnjavamo primjerom.

Primjer 13.6. [Fizikalno značenje druge derivacije]

(i) Na Slici 13.17 (i) je na horizontalnoj osi vrijeme t, a na vertikalnoj temperatura s. Možemo zamisliti da je s-os termometar. Svijetla materijalna točka termometra označava temperaturu. Kako se temperatura smanjuje, točka pada prema dolje, a kako je graf konveksan taj pad je sve sporiji, tj. temperatura usporeno opada. S druge strane, kako je graf konveksan, druga derivacija je pozitivna pa je akceleracija pozitivna pa je gibanje (prema definiciji gibanja) ubrzano.

(ii) Na Slici 13.17 (ii) imamo analognu situaciju. Temperatura opet pada, ali je graf konkavan pa je druga derivacija negativna i gibanje je usporeno. S druge strane, svjetla točka sve brže ide prema dolje pa temperatura ubrzano opada.



Slika 13.17: Primjer 13.6

□

13.4 PRIMJENA MATLAB-A

13.4.1 Pronalaženje lokalnih ekstrema funkcije na zadanom intervalu. Naredba `fminbnd`

Za funkcije zadane s `@` ili `function ... end` točku u kojoj funkcija postiže najmanju vrijednost na zadanom intervalu određujemo naredbom `fminbnd`. Pokažimo to na primjeru funkcije $f(x) = x^3 - 3x$ za koju tražimo najmanju vrijednost na intervalu $< -5, 5 >$:

```
f = @(x) x.^3 - 3*x
min = fminbnd(f, -5, 5)                                % 1.0000
```

S obzirom na to da ne postoji slična naredba za računanje maksimuma funkcije, pronalazimo ga tako da `fminbnd` primijenimo na funkciju $-f$:

```
max = fminbnd(@(x) -f(x), -5, 5)                      % -1.0000
```

13.4.2 Intervali rasta i pada, konveksnosti i konkavnosti te kritične točke za simbolički zadane funkcije. Naredba `solve`

Na primjeru funkcije $f(x) = x^3 - 3x$ pokažimo kako se, pomoću naredbe `solve`, mogu odrediti intervali rasta i pada te kritične točke (Primjer 13.1 i prvi dio Primjera 13.4) za funkcije zadane simbolički, tj. pomoću naredbe `syms`:

```
syms x
f = x^3 - 3*x
Df = diff(f)
kriticne = solve(Df == 0, x)                          % [-1; 1]
rast = solve(Df > 0, x, 'ReturnConditions', true)
rast.conditions                                 % [x < -1; 1 < x]
pad = solve(Df < 0, x, 'ReturnConditions', true)
pad.conditions                                   % -1 < x & x < 1
```

Rezultat `[x < -1; 1 < x]` treba shvatiti kao zapis unije dvaju uvjeta, tj. unije intervala $< -\infty, -1 >$ i $< 1, \infty >$.
Za određivanje intervala konveksnosti i konkavnosti te točaka lokalnih ekstrema i točaka infleksije (Primjer 13.2 i drugi dio Primjera 13.4) potrebno je izračunati drugu derivaciju funkcije. To možemo učiniti tako da deriviramo već izračunatu prvu derivaciju ili tako da upotrijebimo naredbu `diff(f, 2)`:

```
D2f(x) = diff(f, 2)
tocke_infleksije = solve(D2f == 0, x)                       % 0
konveksnost = solve(D2f > 0, x, 'ReturnConditions', true)
konveksnost.conditions                                  % 0 < x
```

```
konkavnost = solve(D2f < 0, x, 'ReturnConditions', true)
konkavnost.conditions                                    % x < 0
D2f(-1)                                                     % -6
D2f(1)                                                       % 6
```

Za kritičnu točku $x = -1$ vidimo da je druga derivacija negativna pa se radi o točki lokalnog maksimuma, a u $x = 1$ je pozitivna pa se radi o točki lokalnog minimuma. Za dobivene točke infleksije možda će trebati provesti poopćeni kriterij lokalnog ekstrema, kao u Primjeru 13.5. To možemo učiniti računanjem derivacija višeg reda pomoću naredbe `diff(f, n)`.

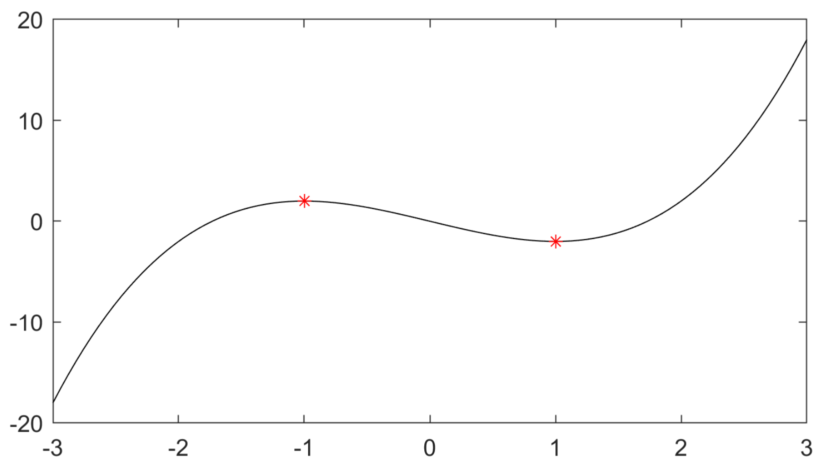
13.4.3 Lokalni ekstremi kod funkcijskih veza. Naredbe `islocalmin` i `islocalmax`

Ako je zadana funkcijska veza $y = f(x)$, gdje su vrijednosti varijable x dane vektorom vrijednosti, onda lokalne ekstreme možemo pronaći korištenjem naredbi `islocalmin` i `islocalmax`. Ove dvije naredbe vraćaju logičku vrijednost 1 (`true`) na mjestima elemenata vektora vrijednosti od x za koje y postiže lokalno najmanju, odnosno najveću vrijednost. Pokažimo to na primjeru funkcijske veze $y = x^3 - 3x$:

```
x = linspace(-3, 3)
y = x.^3 - 3*x
max = islocalmax(y)
min = islocalmin(y)
x(min)                                                       % 1
x(max)                                                      % -1
```

Crtanjem krivulje $y = x^3 - 3x$ zajedno s dobivenim točkama provjeravamo da su doista radi o točkama lokalnih ekstrema ili, općenito, njihovim dovoljno dobrim aproksimacijama:

```
plot(x, y, 'k-')
hold on
plot(x(min), y(min), 'r*', x(max), y(max), 'r*')
```



13.5 PITANJA I ZADATCI

1. (i) Analizirajte kriterij za rast funkcije f oko x_0: ako je $f'(x_0) > 0$, onda f raste oko x_0. Uočite dvije tvrdnje: prva, $f'(x_0) > 0$, koja se zove pretpostavka ili premisa te druga, f *raste oko* x_0, koja se zove zaključak ili konkluzija. Te tvrdnje povezane su u formu "ako onda". Smisao je da ako je prva tvrdnja istinita, onda je i druga.

   (ii) Primjerom pokažite da općenito ne vrijedi obratna tvrdnja, tj. da se može dogoditi da druga tvrdnja bude istinita, a prva ne. Drugim riječima, postoji funkcija f i x_0 tako da f raste oko x_0, ali je $f'(x_0) = 0$. Uputa: razmotrite funkciju $f(x) := x^3$ i $x_0 = 0$.

2. (i) Nađite još neke primjere poput ovoga iz Zadatka 1 (ii), neke da budu potencije, a neke ne. Pokušajte naći takav primjer u kojemu je $x_0 = 1$.

   (ii) Može li biti da funkcija f raste oko x_0, a da bude $f'(x_0) < 0$? Uputa: pogledajte kriterij pada funkcije oko x_0.

3. (i) Vrijedi li obratna tvrdnja u kriteriju konveksnosti funkcije oko točke? Drugim riječima, postoji li funkcija f koja je konveksna oko x_0, a da bude $f''(x_0) = 0$?

   (ii) Može li biti da je funkcija f konveksna oko x_0, a da bude $f''(x_0) < 0$?

4. Nađite primjer funkcije f i broja x_0 takva da bude $f''(x_0) = 0$, ali $f'(x_0) \neq 0$. Uputa: pokušajte s funkcijom oblika $f(x) = x^3 + ax$, za realni broj a. Poslije nađite primjer u kojemu se pojavljuju i trigonometrijske funkcije.

5. Postoji li funkcija f i x_0 iz domene od f u kojemu f ima točku infleksije, ali x_0 nije stacionarna točka? Uputa: oslonite se na prethodni zadatak.

6. Čestica se giba u vremenu t po y-osi prema formuli $y(t) = 3t^2 - 22t + 7$ u vremenskom intervalu $[0, 8]$, tj. od $t = 0$ do $t = 8$.

   (i) Grafički predočite ovo gibanje. Koji je početni, a koji završni položaj točke?

   (ii) Odredite brzinu gibanja. Koja je početna, a koja završna brzina? Predočite brzinu grafički. Kada je gibanje "prema gore", tj. kada je brzina pozitivna? Uputa: brzina je derivacija funkcije položaja po vremenu.

   (iii) Odredite akceleraciju gibanja. Objasnite zašto je gibanje ubrzano. Uputa: akceleracija je druga derivacija funkcije položaja po vremenu (odnosno, prva derivacija brzine po vremenu).

7. (i) Odredite područja rasta i pada gibanja iz Zadatka 6. Kako su ta područja povezana s brzinom?
   (ii) Za područja rasta odnosno pada detektirajte je li ubrzan ili usporen.
   (iii) Kako tumačite da je gibanje ubrzano, a da postoji usporen pad?

8. Čestica se giba u vremenu t po y-osi prema formuli $y(t) = t^3 - 3t$ u vremenskom intervalu $[-2, 2]$, tj. od $t = -2$ do $t = 2$.
   (i) Grafički predočite ovo gibanje. Koji je početni, a koji završni položaj točke?
   (ii) Odredite brzinu gibanja. Koja je početna, a koja završna brzina? Predočite brzinu grafički. Kada je gibanje "prema gore", tj. kada je brzina pozitivna?
   (iii) Odredite akceleraciju gibanja. U kojem je intervalu gibanje ubrzano, a u kojemu usporeno?
   (iv) Detektirajte ubrzanost odnosno usporenost rasta/pada.

   Uputa: analitički izraz je kao u Primjerima 13.1 i 13.2. Ovdje samo treba već poznato interpretirati u terminima gibanja.

KAZALO

aproksimacija funkcije
- analitički pristup linearnoj aproksimaciji, 175
- aproksimacija eksponencijalne funkcije, 180
- aproksimacija n-tog reda, 180
- aproksimacija sinusa i kosinusa, 181
- formula za aproksimaciju n-tog reda, 180
- formula za kubnu aproksimaciju, 180
- formula za kvadratnu aproksimaciju, 179
- formula za linearnu aproksimaciju, 175
- geometrijski pristup linearnoj aproksimaciji, 177
- kubna aproksimacija, 180
- kvadratna aproksimacija funkcije, 178
- linearna aproksimacija funkcije, 175
- pogreška linearne aproksimacije, 176

brojevi
- apsolutna vrijednost, 5
- brojenje, 1
- brojevni (koordinatni) pravac, 4
- cijeli, 1
- decimalni zapis, 2
- formula za apsolutnu vrijednost, 6
- iracionalni, 1
- ishodište koordinatnog sustava, 4
- jedinična duljina, 4
- kompleksni, 3
- koordinata točke na brojevnom pravcu, 4
- mjerenje, 1
- neperiodan decimalni zapis, 2
- periodan decimalni zapis, 2
- prebrojavanje, 1
- prirodni, 1
- racionalni, 1
- realni, 1
- recipročni broj, 3
- suprotni broj, 3
- znanstveni zapis, 2

derivacije
- brzina promjene funkcije u točki, 153
- derivacija arkus funkcija, 169
- derivacija eksponencijalne funkcije, 167
- derivacija funkcije, 156
- derivacija funkcije u točki, 153, 155
- derivacija inverzne funkcije, 168
- derivacija korijena, 169
- derivacija kvocijenta, 163
- derivacija logaritamske funkcije, 168
- derivacija polinoma, 162
- derivacija potencije, 162
- derivacija razlike, 162
- derivacija složene funkcije, 167
- derivacija trigonometrijskih funkcija, 165

derivacija umnoška, 163
derivacija zbroja, 162
druga derivacija, 174
fizikalno značenje derivacije funkcije u točki, 156
geometrijska predodžba prirasta funkcije i prirasta argumenta, 152
geometrijska predodžba relativnog prirasta funkcije, 152
geometrijsko značenje derivacije funkcije u točki, 155
jednadžba tangente na graf funkcije, 156
karakteristični trokut, 152
neočita svojstva derivacije, 163
očita svojstva derivacije, 162
prirast argumenta, 150
prirast funkcije, 150
prirast veličine, 150
prosječna brzina promjene funkcije, 152
relativni prirast funkcije, 152
tablica značajnih derivacija, 170
treća derivacija, 174

elementarne funkcije
arkus sinus, 139
eksponencijalna funkcija s bazom manjom od 1, 133
eksponencijalna funkcija s bazom većom od 1, 131
eksponencijalna i logaritamska funkcija s jednakim bazama kao inverzne funkcije, 134
funkcija drugi korijen, 129
funkcija kvadriranja, 126
inverzna funkcija funkcije kvadriranja, 129
inverzna funkcija linearne funkcije, 128
kosinus, 138
kvadratna funkcija, 127
linearna funkcija, 125
logaritamska funkcija s bazom manjom od 1, 133
logaritamska funkcija s bazom većom od 1, 131
periodnost trigonometrijskih funkcija, 138
polinom drugog stupnja, 127
prirodni logaritam, 132
sinus, 138
sinus i arkus sinus kao međusobno inverzne funkcije, 139
svojstva eksponencijalne funkcije, 134
svojstva logaritamske funkcije, 134
trigonometrijske funkcije, 135

funkcije
analitičko zadavanje, 112
argument, 111
domena - područje definicije, 111
graf funkcije, 113
grafičko rješavanje jednadžba, 117
inverzna funkcija, 118
jednadžba grafa, 113
kodomena - područje vrijednosti, 111
pojam funkcije, 111
pozitivnost/negativnost, 115

pravilo zavisnosti, 111
rast/pad, 115
ubrzani rast/pad, 115
usporeni rast/pad, 115
zavisna veličina, 108

kompleksni brojevi
algebarski zapis, 3
apsolutna vrijednost, 5
argument, 9
dijeljenje, 4
formula za apsolutnu vrijednost, 6
geometrijska predodžba umnoška realnog i kompleksnog broja, 6
geometrijska predodžba zbroja i razlike kompleksnih brojeva, 7
glavni argument, 13
imaginarna jedinica, 3
imaginarna os, 5
imaginarni dio, 3
jedinična kružnica, 12
kompleksna ravnina, 4
kompleksno konjugirani, 3
kut, 9
množenje, 4
modul, 5
Moivreova formula, 14
oduzimanje, 3
potenciranje, 14
realna os, 5
realni dio, 3
trigonometrijski prikaz, 12
zbrajanje, 3
čisto imaginaran, 3

linearni operatori
definicija, 47
kompozicija, 55
matrični zapis, 47
svojstva, 47
linearni sustavi
Cramerovo pravilo, 82
definicija, 79
elementarne operacije - transformacije, 83
Gauss-Jordanova metoda, 83
koeficijenti, 79
kvadratni sustav, 80
matrica sustava, 81
matrični zapis, 81
metoda invertiranja matrice sustava, 82
nepoznanice, 79
regularni sustav, 82
rješenje, 80

matrice
adjungirana matrica, 60
determinanta matrice bilo kojeg reda, 59
determinanta matrice drugog reda, 58
dijagonalna matrica, 48
donja trokutasta matrica, 49
formula za inverznu matricu, 61
formula za inverznu matricu matrice drugog reda, 58
inverzna matrica, 56
jedinična matrica, 48
kvadratna matrica, 43
matrica, 46
metoda određivanja svojstvenih vrijednosti, 101
množenje, 55
množenje matrice brojem, 56
množenje matrice i jednostupčane matrice, 43
neutralni element za množenje, 56
neutralni element za zbrajanje, 55
nulmatrica, 48

razvoj determinante po retku ili stupcu, 58
računanje determinante pomoću elementarnih operacija, 86
računanje inverzne matrice pomoću elementarnih operacija, 87
red matrice, 43
redak, 43
simetrična matrica, 48
skalarna matrica, 48
stupac, 43
suprotna matrica, 54
svojstva množenja matrica, 61
svojstva zbrajanja, 54
svojstvena vrijednost, 97
svojstveni vektor, 97
tip matrice, 46
transponirana matrica, 48
uvjet za postojanje inverza matrice drugog reda, 58
zbrajanje, 54

Taylorov red
geometrijski red, 184
područje konvergencije, 184
radijus konvergencije, 184
Taylorov razvoj eksponencijalne funkcije, 184
Taylorov razvoj funkcije, 184
Taylorov razvoj funkcije kosinus, 184
Taylorov razvoj funkcije sinus, 184
Taylorov razvoj logaritamske funkcije, 187
zbroj geometrijskog reda, 184

transformacije ravnine i prostora
analitički zapis, 40
centralna simetrija prostora ili ravnine, 39, 43
fiksna točka, 94
fiksni pravac, 93
homotetija s obzirom na ishodište, 94
kut rotacije, 40
kvadratna matrica, 43
matrica rotacije, 41
množenje matrice i jednostupčane matrice, 43
osna simetrija prostora ili ravnine, 39, 44
projekcija prostora ili ravnine, 45
rotacija prostora oko osi rotacije, 46
rotacija ravnine oko ishodišta za kut, 38, 40, 94
simetrija prostora s obzirom na ravninu, 39, 45
simetrija ravnine s obzirom na pravac, 93
složeno rastezanje, 95
translacija prostora ili ravnine, 38, 40
vektor translacije, 40

vektori
analitički prikaz, 31
brojevni pravac, 26
duljina, 23
fizikalno uvođenje, 23
formula za duljinu, 31
formula za kut među vektorima, 71
formula za mješoviti umnožak, 74
formula za skalarni umnožak, 69

formula za vektorski umnožak, 73
geometrijsko uvođenje, 23
geometrijsko značenje mješovitog umnoška, 74
jedinični vektori, 29
jednakost vektora, 23
jednostupčane matrice, 29
kolinearni, 33
komplanarni, 75
koordinatna ravnina, 26
koordinatni pravac, 26
koordinatni prostor, 27
kriterij kolinearnosti, 33
kut među vektorima, 26
kvadranti, 27
linearna kombinacija, 30
mješoviti umnožak triju vektora, 74
množenje vektora i skalara, 24
modul, 23
nulvektor, 25
oktanti, 27
polupravci, 27
pravilo desne ruke, 72
pravilo mnogokuta, 25
pravilo paralelograma, 24
pravilo trokuta, 25
projekcija, 68
proporcionalni, 33
radijus vektor, 30
rezultanta, 24
skalarni umnožak, 69
smjer, 23
suprotni vektor, 25
svojstva skalarnog množenja, 69
svojstva vektorskog množenja, 72
svojstva zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom, 25
svojstvo mješovitog množenja, 75
usmjerenje, 23
uvjet komplanarnosti triju vektora, 75
uvjet okomitosti dvaju vektora, 70
vektor brzine, 23
vektorski umnožak, 71
zbrajanje, 24

MATLAB NAREDBE

abs, 18
acos, 76, 143
acosd, 76
acot, 143
adjoint, 64
angle, 18
asin, 143
assume, 145
atan, 143
ax, 19
axis, 144

charpoly, 105
complex, 18
compose, 145, 172
cos, 143
cot, 143
cross, 76

det, 64
diag, 52
diff, 170–172, 207, 208
dot, 76
double, 144

eig, 103
equationsToMatrix, 89
exp, 143
eye, 51

feval, 119
figure, 19
finverse, 144, 172
fminbnd, 207
for ... end, 191, 192
format, 65
fplot, 119
function ... end, 119, 207
fzero, 120, 121

hold on, 20

imag, 18
inv, 64, 66, 90
isAlways, 66
islocalmax, 208
islocalmin, 208
issymmetric, 52

limit, 158
linsolve, 90
linspace, 50, 147
log, 143
log10, 143
log2, 143

nexttile, 19
norm, 34
nthroot, 143, 145

plot, 18–21, 50, 146
plot3, 50
polarplot, 19
poly, 105, 147
polyval, 146
power, 143

quiver3, 35

real, 18
roots, 105, 146, 147

simplify, 104
sin, 143
solve, 89, 90, 121, 122, 207
sqrt, 143
sym, 65, 66, 104, 146
sympref, 189
syms, 65, 121, 207

tan, 143
taylor, 189, 190
text, 19, 119
tiledlayout, 19
title, 19
transpose, 52

vecnorm, 34
view, 36
vpa, 190
vpasolve, 122

xlabel, 20
xlim, 19, 36

ylabel, 20
ylim, 19, 36

zeros, 51, 192
zlim, 36