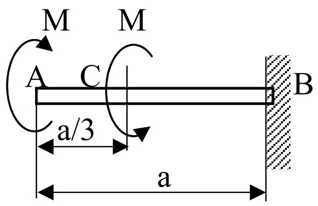
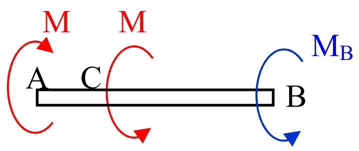
Zadatak 1. Štap AB, okruglog poprečnog presjeka polumjera r, čvrsto je uležišten u točki B i opterećen je momentima M u točkama A i C. Izračunajte promjer štapa da zakret točke A ne bi bio veći od φ_A?. Koliki je tada zakret točke C? Zadano je: M=1500Nm, a=0,6m, G=80GPa, φ_A=0,9°.



Iz slike je vidljivo da momenti M djeluju u točkama A i C, a kao posljedica njihovog djelovanja u točki B pojavljuje se reaktivni moment M_B što je lako dokazati primjenom znanja stečenih u poglavlju „Oslobađanje tijela veza." Grafički predočeno to izgleda ovako:



U ovom tipu zadataka u pravilu ne moramo računati iznos reaktivnog momenta iako prethodnu činjenicu treba uvijek imati na umu.
Djelovanje momenata izaziva zakret svih točaka štapa u odnosu na čvrsti oslonac. Zakret nepomične točke, ovdje točke B, jednak je nuli!

Zakret točke A računa se prema izrazu:

$$\varphi_A = \frac{M \cdot a}{G \cdot I_P} - \frac{M \cdot 2 \cdot a}{3 \cdot G \cdot I_P} = \frac{M \cdot a}{3 \cdot G \cdot I_P}$$

Komentar: zakret φ_A točke A sastoji se od dva člana, prvi član govori o zakretu koji uzrokuje djelovanje momenta M u točki A, a drugi član govori o zakretu koji uzrokuje moment M koji djeluje u točki C. Obzirom da ova dva momenta imaju suprotnu orijentaciju to je u ovom izrazu predočeno suprotnim predznacima. Sami predznaci (pozitivno/negativno) nemaju nikakav fizikalni smisao kao što je to bilo kod aksijalno opterećenih štapova. Moment koji djeluje u točki A djeluje na cijeloj duljini štapa a i to računajući od čvrste točke B, dok moment koji djeluje u točki C djeluje samo na duljini od čvrste točke B do točke C (0,7·a), ali sve točke koje se nalaze iza točke C pa sve do točke A imaju isti zakret jednak onome u točki C. Zakreti prouzročeni djelovanjem momenta na opisani način se zbrajaju, uvažavajući njihov predznak. To se naziva princip superpozicije.

Da bismo izračunali traženi promjer d štapa iz gornjeg izraza potrebno je izraziti polarni moment tromosti I_P:

$$I_P = \frac{d^4 \cdot \pi}{32}$$

i preračunati zakret točke A iz stupnjeva u radijane prema relaciji:

$$180° = \pi \cdot rad \quad \Rightarrow \qquad 1° = \frac{\pi}{180} \cdot rad$$

Množenjem lijeve i desne strane s 0,9 dobiva se zakret točke A u radijanima

$$\hat{\varphi}_A = 0{,}0157 rad$$

Uvrštavanjem ove vrijednosti zajedno s izrazom za polarni moment tromosti u polazni izraz za zakret φ_A točke A može se izračunati vrijednost promjera štapa d:

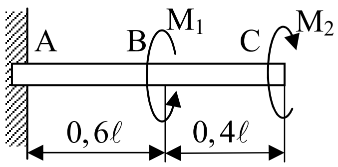
$$d = \sqrt[4]{\frac{9,6 \cdot M \cdot a}{G \cdot \pi \cdot \varphi_A}} = 38,47mm$$

Naposljetku, zakret točke C računa se prema izrazu:

$$\varphi_C = \frac{M \cdot 2 \cdot a}{3 \cdot G \cdot I_P} - \frac{M \cdot 2 \cdot a}{3 \cdot G \cdot I_P} = 0$$

Prvi član predstavlja djelovanje momenta M u točki A s time da se sada gleda njegov utjecaj u točki C, a to je udaljenost 0,7·a od točke B, a drugi član predstavlja utjecaj momenta M koji djeluje u točki C koja se također nalazi na udaljenosti 0,7·a od točke B.

Zadatak 2. Puni štap promjera d, uležišten u točki A, opterećen je momentima uvijanja u točkama B i C. Odredite omjer momenata M_1 i M_2 da zakret točke C bude φ_C=0°. Koliki je tada zakret φ_B točke B u stupnjevima i radijanima? Zadano je: M_1=0,15kNm, d=20mm, ℓ=0,4m, G=80GPa.



Zakret točke C računa se prema izrazu:

$$\varphi_C = \frac{M_1 \cdot 0,6 \cdot \ell}{G \cdot I_P} - \frac{M_2 \cdot \ell}{G \cdot I_P} = 0$$

član $\frac{\ell}{G \cdot I_P}$ može se pokratiti u oba pribrojnika pa se dobije traženi omjer momenata:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{1}{0,6} = 1,67$$

Uz zadanu vrijednost momenta M_1 možemo izračunati vrijednost momenta M_2 =0,25Nm. Zakret točke B izračunat ćemo iz izraza:

$$\varphi_B = \frac{M_1 \cdot 0,6 \cdot \ell}{G \cdot I_P} - \frac{M_2 \cdot 0,6 \cdot \ell}{G \cdot I_P} = \frac{0,6 \cdot \ell}{G \cdot I_P} \cdot \left(M_1 - M_2\right)$$

uz $I_P = \frac{d^4 \cdot \pi}{32} = 15708,0mm^4$

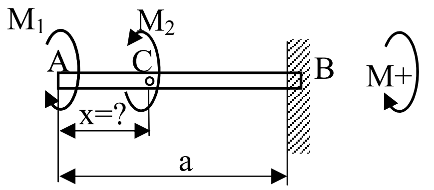
$$\overset{\frown}{\varphi}_B = 0,01459rad$$

Ovu vrijednost pretvorit ćemo u stupnjeve korištenjem poznate relacije

$180° = \pi \cdot rad \Rightarrow \quad \frac{180°}{\pi} = 1rad$ pa je

$\varphi_B = 0,657°$.

Zadatak 3. Štap AB, okruglog poprečnog presjeka promjera d, opterećen je momentima uvijanja M_1 i M_2 u točkama A i C. Odredite udaljenost x između točaka A i C da bi zakret točke A bio φ_A. Koliki je tada zakret točke C? Zadano je: M_1=25Nm, M_2=21Nm, φ_A=0,3°(+), d=20mm, G=80GPa, a=500mm.



Komentar: zadani zakret φ_A točke A je pozitivan u smislu kako je zadan pozitivan predznak moneta uvijanja. Već je prije rečeno da kod uvijanja predznak nema nikakav fizikalni smisao kao što je to slučaj kod aksijalno opterećenih štapova (vlak/tlak), pa je ovaj pozitivni predznak posljedica toga što je pozitivan član u izrazu za zakret točke A veći od negativnog člana na što treba paziti prilikom postavljanja izraza.

Zakret točke A je:

$$\varphi_A = \frac{M_1 \cdot a}{G \cdot I_P} - \frac{M_2 \cdot (a-x)}{G \cdot I_P}$$

uz zadani zakret preračunat u radijane, kako je već pokazano, $\widehat{\varphi}_A = 0,005236 rad$ i polarni moment tromosti:

$$I_P = \frac{d^4 \cdot \pi}{32} = 15708,0 mm^4$$

može se izračunati vrijednost x kako slijedi:

$$x = a \cdot \left(1 - \frac{M_1}{M_2}\right) + \varphi_A \cdot \frac{G \cdot I_P}{M_2}$$

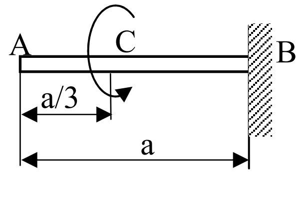
$$x = 218,1 mm$$

Preostaje za izračunati zakret točke C za upravo izračunati x:

$$\varphi_C = \frac{M_1 \cdot (a-x)}{G \cdot I_P} - \frac{M_2 \cdot (a-x)}{G \cdot I_P} = \frac{(M_1 - M_2) \cdot (a-x)}{G \cdot I_P}$$

$$\widehat{\varphi}_C = 0,000897 rad \quad (\varphi_C = 0,0514°)$$

Zadatak 4. U štapu AB, okruglog poprečnog presjeka polumjera r, opterećenom zakretnim momentom M u točki C izmjereno je naprezanje τ. Koliko je polumjer r štapa? Koliki je zakret točke A? Do kojeg iznosa se smije povećati zakretni moment da se u štapu ne bi prekoračilo dopušteno naprezanje uz ostale uvjete nepromijenjene? Zadano je: M=85Nm, τ=45MPa, τ_{DOP}=75MPa, G=80GPa, a=800mm.



Tangencijalno naprezanje u štapu računa se prema izrazu:

$$\tau = \frac{M}{w_P} = 45MPa$$

gdje je w_P polarni moment tromosti prema izrazu:

$$w_P = \frac{I_P}{r_{\max}} = \frac{\frac{d^4 \cdot \pi}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{d^3 \cdot \pi}{16} = \frac{(2 \cdot r)^3 \cdot \pi}{16} = \frac{r^3 \cdot \pi}{2}$$

$r_{\max}$ predstavlja maksimalnu udaljenost točke presjeka od središta zakrivljenosti presjeka i u toj točki će nastupiti maksimalni iznos naprezanja. Ovdje je $r_{\max} = \frac{d}{2} = r$.

Uvrštavanjem izraza za w_P u izraz za naprezanje τ dobiva se izraz iz kojeg je moguće izračunati traženi promjer d:

$$\tau = \frac{2 \cdot M}{r^3 \cdot \pi} \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot M}{\tau \cdot \pi}}$$

$$r = 10,6mm$$

Zakret točke A iznosi:

$$\varphi_A = \frac{M \cdot \frac{2}{3} \cdot a}{G \cdot I_P} = \varphi_C$$

uz $I_P = \frac{r^4 \cdot \pi}{2} = 19830,9mm^4$

$\hat{\varphi}_A = 0,0286rad \qquad (\varphi_A = 1,64°)$

Komentar: primijetimo da moment M uvija štap od točke C do uležištenja, dok je od točke A do točke C štap neopterećen odn. unutarnji moment jednak je nuli pa se zakret točke C prenosi u jednakom iznosu na sve točke neopterećenog dijela do točke, slično kao što je bilo s pomakom točke neopterećenog dijela štapa kod aksijalno opterećenih štapova.

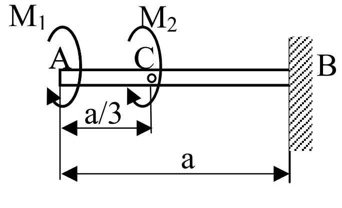
Iznos do kojeg se moment smije povećati da se ne prekorači uvjet dopuštenog naprezanja je:

$$\tau = \frac{M'}{w_P} \le \tau_{DOP} \qquad \Rightarrow \qquad M' = w_P \cdot \tau_{DOP}$$

uz $w_P = 1870,8mm^3$

$M' = 141,7Nm$.

Zadatak 5. Štap AB, okruglog poprečnog presjeka promjera d, opterećen je momentima uvijanja M_1 i M_2 u točkama A i C. Koliki su zakreti točaka A i C? Izračunajte novi promjer štapa da bi još bio zadovoljen uvjet dopuštenog naprezanja? Zadano je: M_1=25Nm, M_2=14Nm, d=20mm, τ_{DOP}=45MPa, G=80GPa, a=500mm.



Zakreti točaka A i C su:

$$\varphi_A = \frac{M_1 \cdot a}{G \cdot I_P} + \frac{M_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot a}{G \cdot I_P} = \frac{a}{G \cdot I_P}\left(M_1 + \frac{2}{3} \cdot M_2 \right)$$

$$\varphi_C = \frac{M_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot a}{G \cdot I_P} + \frac{M_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot a}{G \cdot I_P} = \frac{2 \cdot a}{3 \cdot G \cdot I_P}\left(M_1 + M_2 \right)$$

uz $I_P = \frac{d^4 \cdot \pi}{32} = 15708,0 mm^4$

$\widehat{\varphi}_A = 0,013661 rad \qquad (\varphi_A = 0,783°)$

$\widehat{\varphi}_C = 0,0135 rad \qquad (\varphi_C = 0,593°)$

Naprezanje u štapu, uvažavajući uvjet dopuštenog naprezanja, jednako je:

$$\tau = \frac{M_1 + M_2}{w_P} \leq \tau_{DOP}$$

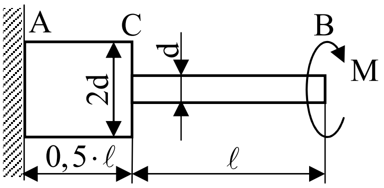
uz $w_P = \frac{d'^3 \cdot \pi}{16}$

$$d' = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot (M_1 + M_2)}{\tau_{DOP} \cdot \pi}}$$

$d' = 16,4 mm$

Komentar: momenti M_1 i M_2 uvijaju štap u istom smjeru pa se njihovi iznosi zbrajaju (superponiraju). Maksimalno naprezanje pojavit će se na mjestu (potezu) gdje je iznos unutarnjeg momenta najveći a to je između točaka C i B i jednak je zbroju M_1+M_2. Između točaka A i C unutarnji moment jednak je momentu M_1 jer iza točke c više ne djeluje moment M_2.

Zadatak 6. Štap AB opterećen je momentom uvijanja M u točki B. Odredite iznos promjera d da zakret točke B ne bi bio veći od 0,25°. Koliki je zakret točke C i koliko je naprezanje u štapu? Zadano je: M=25Nm, l=0,5m, G=80GPa.



Komentar: rješenju zadatka se pristupa na jednak način kao i prije, s tom razlikom što se zbog različitih promjera štapa mijenja polarni moment tromosti odn. otpora.

Zakret točke B računa se prema:

$$\varphi_B = \frac{M \cdot 0,5 \cdot \ell}{G \cdot I_{P1}} + \frac{M \cdot \ell}{G \cdot I_{P2}}$$

Nadalje je:

$$I_{P1} = \frac{(2 \cdot d)^4 \cdot \pi}{32} = \frac{d^4 \cdot \pi}{2}$$

$$I_{P2} = \frac{d^4 \cdot \pi}{32}$$

što uvršteno u polazni izraz daje:

$$\varphi_B = \frac{2 \cdot M \cdot 0,5 \cdot \ell}{G \cdot d^4} + \frac{32 \cdot M \cdot \ell}{G \cdot d^4} = \frac{33 \cdot M \cdot \ell}{G \cdot d^4}$$

iz čega slijedi:

$$d = \sqrt[4]{\frac{33 \cdot M \cdot \ell}{G \cdot \pi \cdot \varphi_B}}$$

uz zadani zakret točke B izražen u radijanima $\widehat{\varphi}_B = 0,004363 rad$ promjer d je:

$$d = 24,77 mm$$

Zakret točke C je:

$$\varphi_C = \frac{M \cdot 0,5 \cdot \ell}{G \cdot I_{P1}}$$

uz $I_{P1} = \dfrac{d^4 \cdot \pi}{2} = 590906,5 mm^4$

$\widehat{\varphi}_C = 0,0001322 rad \quad \varphi_C = 0,00758°$

Naprezanje nije jednako u cijelom štapu jer se mijenja promjer štapa pa je:

$$\tau_1 = \frac{M}{w_{P1}} = \frac{2 \cdot M}{d^3 \cdot \pi}$$

$$\tau_2 = \frac{M}{w_{P2}} = \frac{16 \cdot M}{d^3 \cdot \pi}$$

jer je $w_{P1} = \dfrac{I_{P1}}{d}$ ($r_{\max 1} = d$) i $w_{P2} = \dfrac{I_{P2}}{\frac{d}{2}}$ ($r_{\max 2} = \dfrac{d}{2}$). Slijedi:

$\tau_1 = 1,05 MPa$ i $\tau_2 = 8,4 MPa$