Sveučilište u Zagrebu
Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije
Zavod za termodinamiku, strojarstvo i energetiku

Zbirka zadataka iz Osnova strojarstva

(Preddiplomski studij Primijenjena kemija)

Sastavio i priredio: prof. dr. sc. Igor Sutlović

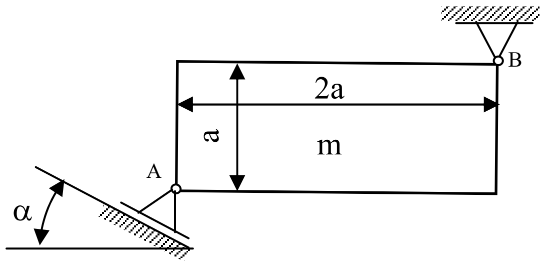
Zagreb, 2021.

Sadržaj

1. Pravilo izolacije

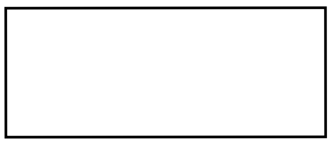
1.1. Riješeni primjeri

Zadatak 1. Izračunajte iznos mase m bloka, vertikalnu komponentu reakcije u točki B i reakcije N_A u točki A ako je poznat iznos horizontalne reakcije B_x u točki B. Zadano je: B_x=35N, α=30°.



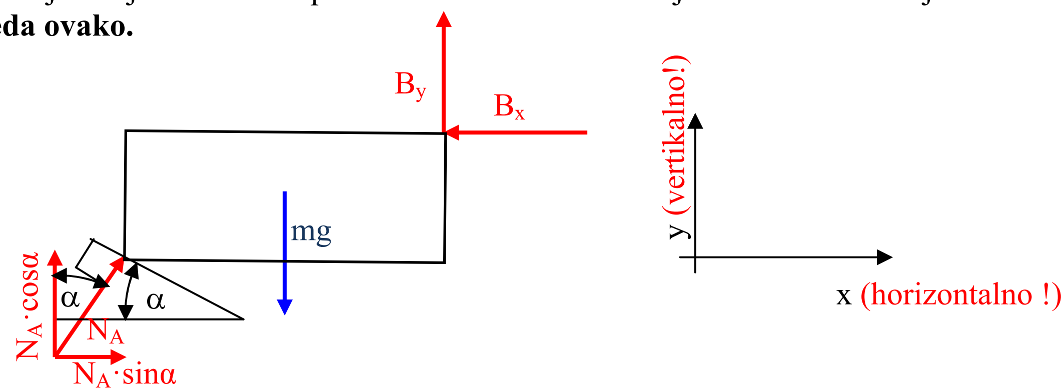
Da bi riješili ovaj zadatak potrebno je osloboditi tijelo veza odn. primijeniti pravilo izolacije! Zato ćemo prvo nacrtati sliku uklanjajući veze tijela s okolinom i pri tome zadržavajući ravnotežu tijela!

1. korak izgleda ovako.



Ovako nacrtano tijelo nije u ravnoteži pa stvarne veze treba nadomjestiti silama reakcije.

2. korak izgleda ovako.



U točki B se nalazi **nepomični oslonac** koji prenosi **dvije komponete sile reakcije** (vidjeti predavanja). Te dvije komponente su uvijek međusobno okomite! U tekstu zadatka se traži određivanje iznosa <u>horizontalne komponente B_x što znači</u> da je njoj pripadajuća vertikalna komponenta B_y.

U točki A se nalazi **pomični oslonac** koji prenosi samo **jednu komponentu sile reakcije**. Pravac na kojem leži sila okomite je na ravninu na koju je položen oslonac. Ovdje se ta ravnina nalzi pod kutem α u odnosu na horizontalnu ravninu.

Moramo imati stalno u vidu da je sila vektor, veličina definirana s tri podatka; smjerom djelovanja (pravcem na kojem leži), iznosom (duljinom) i orijentacijom (kuda strelica gleda). Posebno vezano uz orijentaciju komponenti reakcije postavlja se pitanje kako znati orijentaciju tih komponenti. Nikako ili po osjećaju! Prema tome: orijentacija

komponenti sila reakcije se pretpostavlja. Znači da ne bi bilo pogrešno na gornjoj slici vektore orijentirati i suprotno.
U nastavku ćemo postaviti analitičke jednadžbe koje nazivamo uvjetima ravnoteže!
Za naznačeni koordinatni sustav to izgleda ovako, a prije toga sila N_A treba se rastaviti u komponente odabranog koordinatnog sustava (Podsjetimo: dva su kuta jednaka ako su im krakovi međusobno okomiti (ovdje slučaj) ili su im krakovi međusobno paralelni:

$$\sum F_x = 0 \qquad N_A \cdot \sin\alpha - B_x = 0 \qquad (1)$$

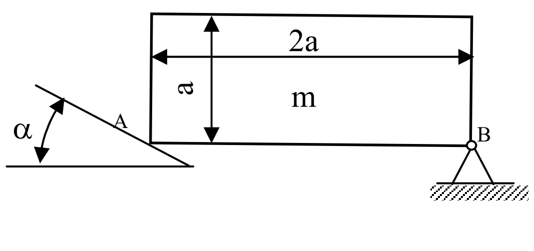
$$\sum F_y = 0 \qquad N_A \cdot \cos\alpha - m \cdot g + B_y = 0 \qquad (2)$$

Još je potrebno postaviti treći uvjet ravnoteže a to je suma momenata oko neke točke. Točku odabiremo proizvoljno, uobičajeno neku točku u kojoj se nalazi oslonac. Odaberimo točku B. Moment nastaje tako da se pomnoži iznos sile s najmanjom udaljenošću sile (pravca na kojem leži) od točke B. Kraće rečeno, iznos momenta je umnožak sile i kraka tako da sile i krak (najmanja udaljenost) moraju biti okomiti! Vektor je također moment čiji je pravac okomit na ravninu u kojoj leže sile (sve naše sile leže u jednoj xy ravnini). Kako je vektor orijentiran određujemo po pravilu desne ruke, jer djelovanje svake pojedine sile želi tijelo zarotirati oko promatrane točke u smjeru kazaljke na na satu ili suprotno (kao da zavrćemo ili odvrćemo vijak).

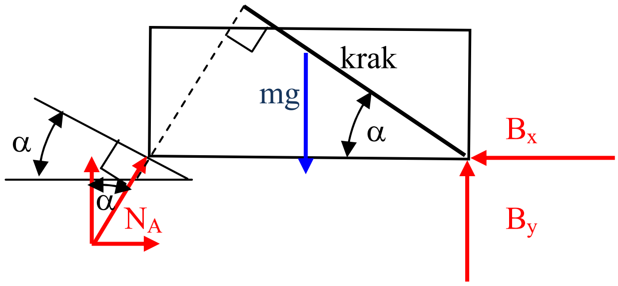
$$\sum M_B = 0 \qquad m \cdot g \cdot a - N_A \cdot \cos\alpha \cdot 2 \cdot a + N_A \cdot \sin\alpha \cdot a = 0 \quad (3)$$

Kako odrediti predznake u prethodnom izrazu. Stavite olovku okomito na papir u toči B. **Desnom** rukom obavijte prstima olovku tako da **ispruženi palac** bude paralelan s olovkom.
to neka bude predznak + (plus). Povežimo to sa silama! Ispružite obavijene prste (olovka ostaje na mjestu) i ispruženim prstima „pogurajte“ silu ***mg***. Dobili bi rotaciju u smjeru suprotnom od kazaljke na satu. Sila (pravac na kojem leži-nacrtajte ga! – pogledajte zadatak 2. u nastavku) ***mg*** od točke B udaljena je za a (sila i krak moraju biti okomiti). To ste napravili tako da se dlanom niste uboli na strelicu vektora-ovo je važno! Postupite isto sa komponentom $\boldsymbol{N_A \cdot \cos\alpha}$ i ubost ćete se na strelicu tog vektora, Taj vektor tijelo želi zarotirati u smjeru kazaljke na satu. To znači da sada desnu ruku morate okrenuti tako da se ne ubodete na strelicu. Olovka stalno ostaje isto, a ruku okrenite tako da ispruženi palac ostaje paralelan s olovkom ali sada gleda u papir, tako se nećete ubosti na strelicu. To je moment predznaka – (minus). I sada okrenite sami ruku tako da se ne ubodete na strelicu preostale komponente $\boldsymbol{N_A \cdot \sin\alpha}$ i dobit ćete predznak + 8plus) jer vam palac sada gleda prema gore (kao kod sile mg).
Naposljetku rješenje je sljedeće:
Iz (1) dobijemo N_A=70N i to uvrstimo u (3) da bi dobili masu m=8,79kg. Iz (2) dobivamo B_y=25,6N.
Što bi bilo da smo drukčije orijentirali neku od crvenih sila. Rješenje bi imalo negativni predznak. To znači da bi pored tako (krivo) pretpostavljene sile ucrtali sili kao je stvarno orijentirana i dalje računali s pozitivnom (apsolutnom) vrijednosti te sile.
Ipak uočimo iz $\sum F_x = 0$ da odmah možemo vidjeti da reakcije B_x i $N_A \cdot \sin\alpha$ moraju imati suprotne predznake jer jedino tako možemo dobiti nulu. Također možemo uočiti da sila N_A mora djelovati ovako kako je ucrtana jer ona pridržava tijelo da se ne zarotira oko toke B uslijed djelovanja sile mg.

Zadatak 2. Blok mase m oslanja se na glatku podlogu u točki A. Izračunajte iznos mase m bloka te horizontalnu i vertikalnu komponentu reakcije u točki B ako je poznat iznos reakcije N_A u točki A. Zadano je: N_A=35N, α=30°.



Zadatak se rješava na isti način kao i prethodni, izolacijom tijela.



Razlika u odnosu na prethodni zadatak je u osloncu u točki A koji nije pomični nego je glatka podlogu. Taj oslonac se u neku ruku ponaša slično kao i pomični jer reaktivna sila je okomita na podlogu, ali ipak postoji jedna razlika. U ovom slučaju sila će uvijek biti orijentirana kao na slici (u literaturi možete pronaći i drugačije tumačenje, ali radi jednostavnosti kod nas će to uvijek ovako izgledati).
Postavimo sada uvjete ravnoteže kao i u prethodnom zadatku.

$$\sum F_x = 0 \qquad N_A \cdot \sin\alpha - B_x = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \qquad N_A \cdot \cos\alpha - m \cdot g + B_y = 0 \qquad (2)$$

Suma momenata oko točke B:

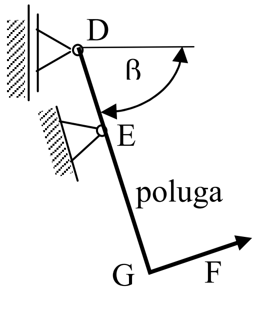
$$\sum M_B = 0 \qquad m \cdot g \cdot a - N_A \cdot \cos\alpha \cdot 2 \cdot a = 0 \quad (3)$$

Prva dva uvjeta ravnoteže su ispala jednaka onima iz prvog zadatka, a vidimo da se suma momenata razlikuje. Zašto? Zato jer se oslonac B ne nalazi na istom mjestu. Ovdje je to nešto jednostavnije i nema potrebe raditi sumu momenata preko dvije komponente sile N_A kao u prethodnom zadatku. Što je ovdje napravljeno? Produžen je pravac na kojem leži sila N_A (crtkana linija) i na njega je povučena okomica kroz točku B (puna debela linija). To čini najmanju udaljenost između točke B i pravca tj. krak sile N_A oko točke B. To je ujedno pravokutni trokut pa vrijedi:

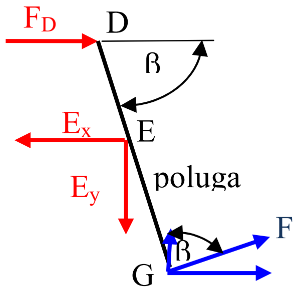
$$\cos\alpha = \frac{krak}{2 \cdot a}$$

Rješenja su:
iz (1) B_x=17,5N,
iz (3) m=6,18kg i
iz (2) B_y=32,0N

Zadatak 3. Okomito na polugu u točki G djeluje sila F. Duljina poluge iznosi ℓ, a udaljenost točaka E i G je $\frac{3}{5}\ell$. Izračunajte iznose horizontalne i vertikalne reakcije u točki E te iznos reakcije u vertikalno postavljenom osloncu u točki D. Masu poluge zanemarite. Zadano je: F=75N, β=55°.



Oslobodimo polugu veza s okolinom kao je već objašnjeno.



Bez obzira što se nepomični oslonac E nalazi pod nepoznatim kutom u njemu možemo postaviti horizontalnu i vertikalnu komponentu reakcije. U točki D je pomični oslonac je smjer sile definiran okomicom na ravninu u kojoj leži i prenosi samo jednu komponentu reakcije.
Uvjeti ravnoteže glase.

$\sum F_x = 0 \qquad F_D - E_x + F \cdot \sin\beta = 0 \qquad (1)$

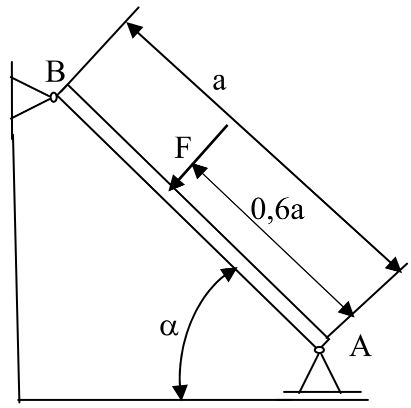
$\sum F_y = 0 \qquad -E_y + F \cdot \cos\beta = 0 \qquad (2)$

Suma momenata oko točke B:

$\sum M_E = 0 \qquad F_D \cdot \frac{2}{5} \cdot \ell \cdot \sin\beta - F \cdot \frac{3}{5} \cdot \ell = 0 \ (3)$

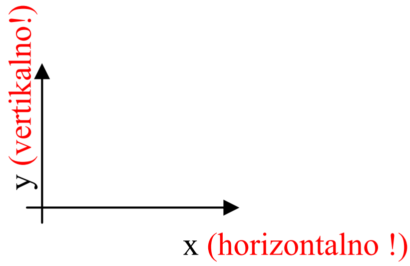
Sila F je okomita na polugu pa je jednostavno izračunati njen krak u odnosu na točku E.
Rješenja su:
iz (3) F_D=137,3N,
iz (1) E_x=198,8N i
iz (2) E_y=43,0N

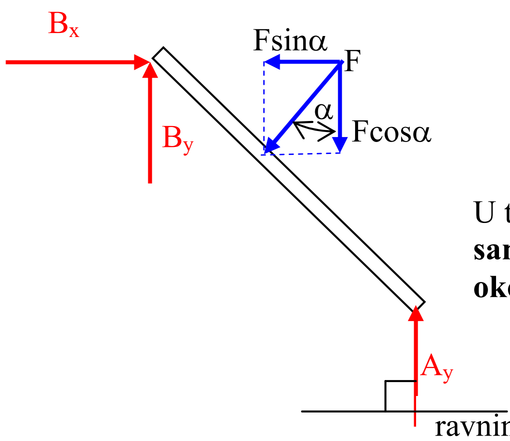
Zadatak 4. Sila F djeluje okomito na polugu. Izračunajte horizontalne i vertikalne komponente reakcija u točkama A i B. Masu poluge zanemarite! Zadano je: α=32°, F=200N.



Da bi riješili ovaj zadatak potrebno je osloboditi tijelo veza odn. primijeniti pravilo izolacije!

U točki B nalazi se **nepomični** oslonac koji prenosi **dvije** međusobno okomite komponente sile reakcije (vidjeti predavanja!)





U točki A nalazi se **pomični** oslonac koji prenosi **samo jednu** komponentu sile reakcije i to **okomitu na podlogu** (vidjeti predavanja!)

Postavljanje analitičkih uvjeta ravnoteže:
Sume sila za odabrane koordinatne osi.

$\Sigma F_x=0$: $B_x - F\cdot\sin\alpha=0$ (1) $\Sigma F_y=0$: $B_y + A_y - F\cdot\cos\alpha=0$ (2)

Suma momenata oko točke B (točka se odabire proizvoljno!)

$\Sigma M_B=0$: $-F\cdot 0{,}4\cdot a + A_y\cdot a\cdot\cos\alpha=0$ (3)

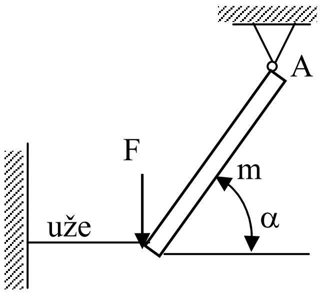
Iz (3) slijedi $\underline{A_y = 94{,}3\ N}$

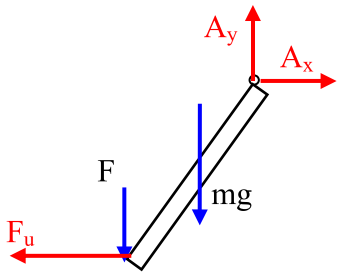
Uvrštavanjem ove vrijednosti u (2) dobiva se $\underline{B_y = 75{,}3\ N}$

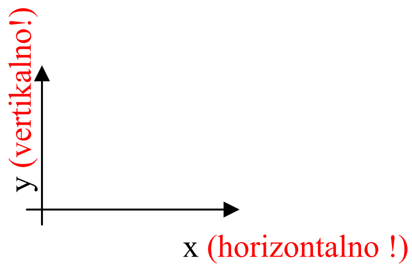
Iz (1) slijedi $\underline{B_x = 106{,}0\ N}$

Dobivene vrijednosti predstavljaju iznose <u>horizontalnih i vertikalnih komponenti</u> reakcija u točkama A i B. Orijentacije pojedinih komponenti reakcija se pretpostavljaju. Pravilna pretpostavka potvrđuje se pozitivnim predznakom rješenja (ovdje slučaj).

Zadatak 5. Greda mase m, duljine a uležištena je u točki A i obješena je na kraju o horizontalno uže. Izračunajte horizontalnu i vertikalnu komponentu reakcije u točki A te napetost užeta ako na njenom kraju djeluje okomita sila F. Zadano je F=40N, m=15kg, α=30°.







Uže prenosi jednu
komponentu sile na način da
uže uvijek ostane napeto-
paziti na orijentaciju vektora!

Rješenje:

$\Sigma F_x=0$: $-F_u+A_x=0$ (1)

$\Sigma F_y=0$: $A_y-m\cdot g-F=0$ (2)

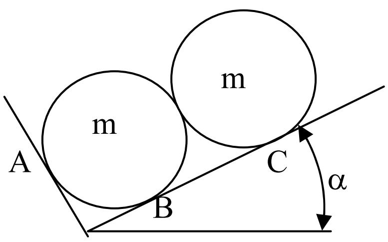
$\Sigma M_A=0$: $m\cdot g\cdot\frac{a}{2}\cdot\cos\alpha+F\cdot a\cdot\cos\alpha-F_u\cdot a\cdot\sin\alpha)=0$ (3)

iz (3) $\underline{F_u=196{,}7\ \text{N}}$

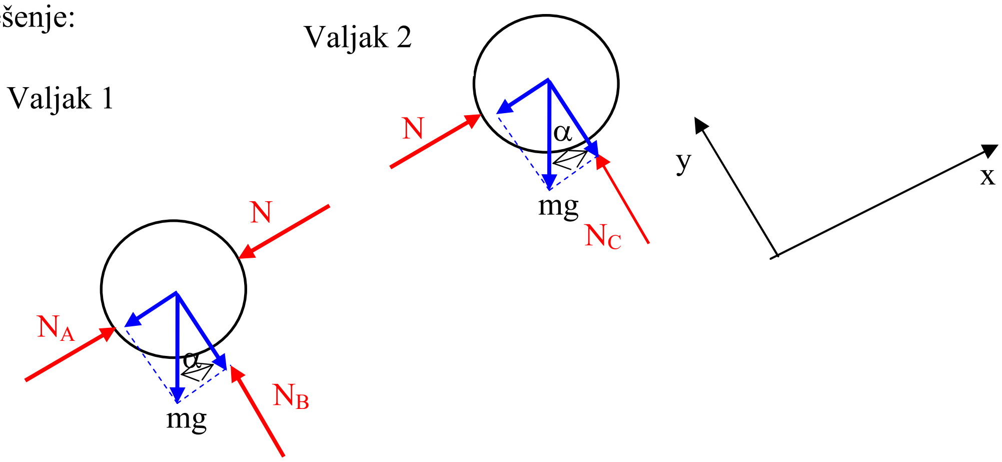
iz (1) $\underline{A_x=196{,}7\ \text{N}}$

iz (2) $\underline{A_y=187{,}2\ \text{N}}$

Zadatak 6. Dva valjka jednakih masa i dimenzija oslanjaju se međusobno, i na pravokutnu podlogu. Izračunajte iznose normalnih komponenti reakcija u točkama A, B i C. Trenje zanemarite! Zadano je: $\alpha=32°$, $m=12$kg.



Rješenje:



Uvjeti ravnoteže za valjak 1:

$\Sigma F_x=0$: $N - m \cdot g \cdot \sin\alpha = 0$ (1) $\Sigma F_y=0$: $N_C - m \cdot g \cdot \cos\alpha = 0$ (2)

Uvjeti ravnoteže za valjak 2:

$\Sigma F_x=0$: $N_A - m \cdot g \cdot \sin\alpha - N = 0$ (3) $\Sigma F_y=0$: $N_B - m \cdot g \cdot \cos\alpha = 0$ (4)

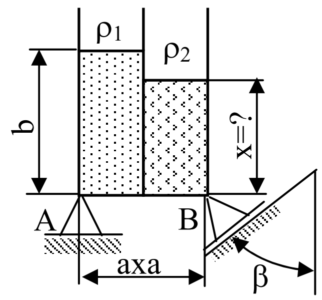
Iz (1) $\underline{N = 62{,}4\ N}$ (ova sila predstavlja vezu između ova dva valjka)

iz (2) $\underline{N_C = 99{,}8\ N}$

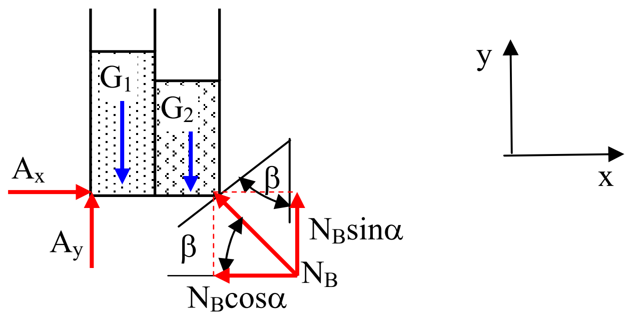
iz (3) $\underline{N_A = 124{,}8\ N}$

iz (4) $\underline{N_B = 99{,}8\ N}$

Zadatak 7. Posuda kvadratnog dna (axa) po visini je pregrađena po pola. S lijeve strane nalivena je tekućina gustoće ρ_1 do visine b. Do koje visine x treba naliti tekućinu gustoće ρ_2 s desne strane ako je u osloncu B izmjeren iznos reakcije od 80N. Zadano je: b=25cm, a=24cm, $\rho_1=850 kg/m^3$, $\rho_2=998 kg/m^3$, $\beta=50°$.



Rješenje:



Računanje sila težina kapljevina G_1 i G_2 uz $\rho = \frac{m}{V}$:

$$G_1 = m_1 \cdot g = \rho_1 \cdot g \cdot V_1 = \rho_1 \cdot g \cdot \frac{a^2}{2} \cdot b \quad (1)$$

$$G_2 = m_2 \cdot g = \rho_2 \cdot g \cdot V_2 = \rho_2 \cdot g \cdot \frac{a^2}{2} \cdot x \quad (2)$$

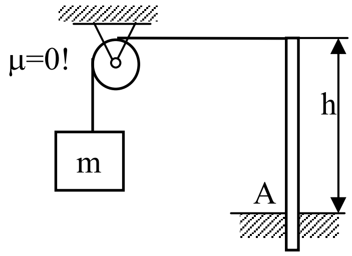
Uvjeti ravnoteže:

$$\Sigma M_A = 0 \qquad -G_1 \cdot \frac{a}{4} - G_2 \cdot \frac{3}{4} \cdot a + N_B \cdot \sin\alpha \cdot a = 0 \qquad (3)$$

Uvrštavanjem izraza (1) i (2) u izraz (3) uz zadani iznos sile N_B=80N visina do koje treba naliti tekućinu gustoće ρ_2 je:

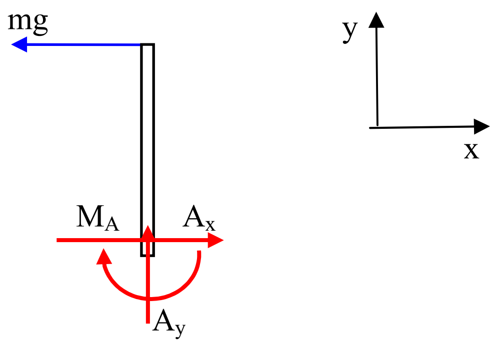
<u>x= 0,219 m</u>

Zadatak 8., Konzola je posredstvom užeta opterećena masom m. Izračunajte reakcije u točki A. Trenje zanemarite! Zadano je: m=6,5kg, h=600mm.



Rješenje:

Sila u užetu jednaka je sili težine mg jer nema trenja između užeta i podloge (valjka), te je time osigurana napetost užeta!



Oslonac u točki A naziva se **uklještenje** i prenosi **dvije komponente reaktivne sile A_x i A_y** i **reaktivni moment M_A!**

Predznak reaktivnog momenta M_A se pretpostavlja!

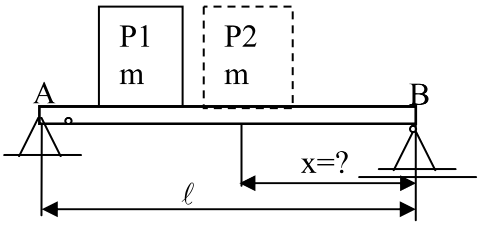
Uvjeti ravnoteže su:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad A_x - mg = 0 \qquad (1)$$
$$\Sigma F_y = 0 \qquad A_y = 0 \qquad (2)$$
$$\Sigma M_A = 0 \qquad m \cdot g \cdot h - M_A = 0 \qquad (3)$$

iz (1) <u>A_x= 63,8 N</u>
iz (3) <u>M_A= 38,3 N</u>

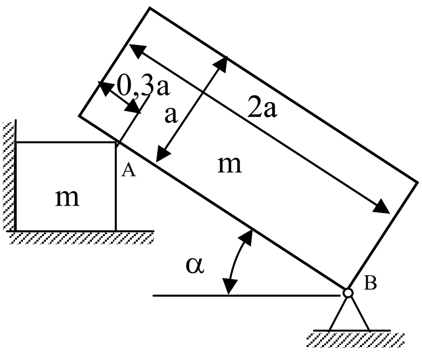
1.2 Primjeri za samostalno rješavanje

1. Masa m položena je na gredu duljine ℓ i zanemarive mase. U položaju mase m (položaj P1) na udaljenosti $\frac{1}{3}\ell$ od točke A vertikalna reakcija u točki B iznosi F_B=57N. Odredite novi položaj (položaj P2) udaljen za x od točke B da bi se iznos vertikalne reakcije u točki A uvećao za jednu trećinu početnog iznosa. Koliko tada iznosi reakcija u točki B? Zadano je: ℓ=1,3m.



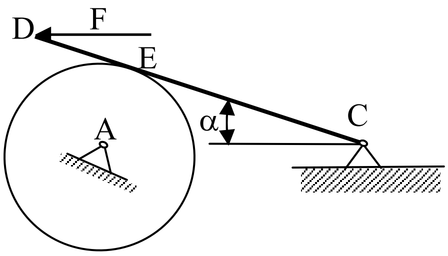
Rješenje: x=1,156 m; F_B'=18,99 N.

2. Blok mase m oslanja se na horizontalno položen blok iste mase (m) u točki A. Izračunajte horizontalnu i vertikalnu komponentu reakcije u točki B te iznose reakcija između podloge i horizontalnog bloka. Trenje zanemarite! Zadano je: m=3,7kg, α=30°.



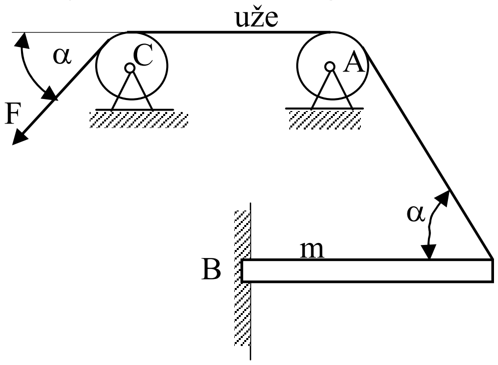
Rješenje: B_x=6,58 N; B_y=24,9 N; N_A=13,15 N; reakcije između horizontalnog bloka i podloge; N_1=47,7 N; N_2=6,58N.

3. Na valjak posredstvom poluge duljine ℓ i mase m, učvršćene u točki C, djeluje horizontalna sila F. Odredite iznose horizontalnih i vertikalnih komponenti sila reakcije u točkama A i C! Zadano je: α=25°, F=120N, i duljina dužina $|DE| = 0,2\ell$, m=2kg. Napomena: masu valjaka zanemarite, točka A nalazi se u središtu valjka.



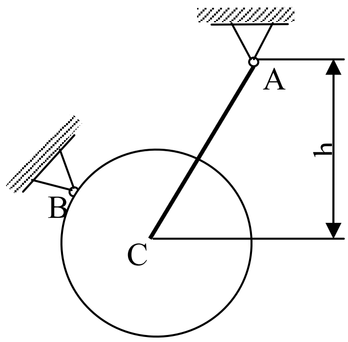
Rješenje: A_x=31,5 N; A_y=67,5 N; C_x=88,5 N; C_y=47,9 N.

4. Sila F posredstvom užeta djeluje na gredu mase m i duljine ℓ, koja je u točki B ukliještena u podlogu. Izračunajte iznose vertikalnih i horizontalnih komponenti sila reakcije u osloncima A i C, te iznose komponenti sile reakcije i reaktivnog momenta u uklještenju B! Zadano je: F=120N, m=15kg, α=35°, ℓ=0,7m. Trenje zanemarite!



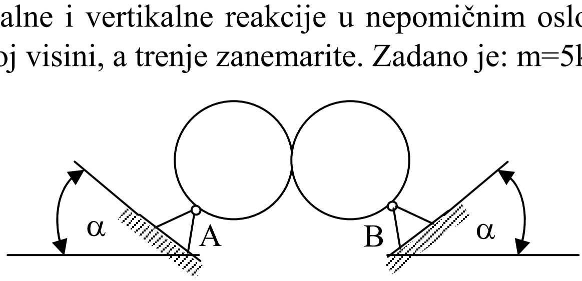
Rješenje: A_x=3,37 N; A_y=10,7 N; B_x=15,28 N; B_y=136,45 N; M_B=44,01 Nm.

5. Valjak mase m i promjera D ovješen je na nepomični oslonac u točki B i pridržava se štapom AC duljine ℓ zanemarive mase čiji je kraj pričvršćen u središtu valjka (točka C). Odredite horizontalne i vertikalne komponente reaktivnih sila u točkama A i B. Napomena: polumjer koji prolazi kroz točku B okomit je na štap. Zadano je: m=7kg, h=700mm, ℓ=920mm. Napomena: okomica spuštena kroz točku A tangira valjak (kružnicu).



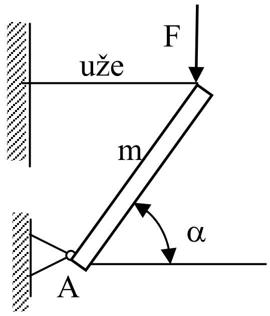
Rješenje: A_x=33,9 N; A_y=39,8 N; B_x=33,9 N; B_y=28,9 N.

6. Dva valjka jednakih masa m i promjera D postavljeni su na nepomične oslonce i međusobno se dodiruju. Koliko iznosi reakcija u točki dodira između valjaka te koliko iznose horizontalne i vertikalne reakcije u nepomičnim osloncima. Nepomični oslonci nalaze se na istoj visini, a trenje zanemarite. Zadano je: m=5kg, α=55°.



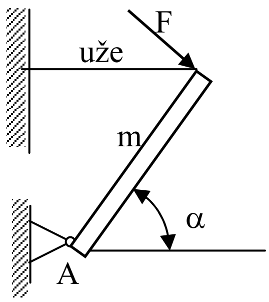
Rješenje: sila u točki dodira N=34,3 N; A_x= B_x=34,3 N; A_y=B_y=49,1 N.

7. Greda mase m, duljine a uležištena je u točki A i obješena je na svojem kraju o horizontalno uže. Izračunajte horizontalnu i vertikalnu komponentu reakcije u točki A te napetost užeta ako na gredu djeluje vertikalna sila F. Zadano je F=30N, m=20kg, α=30°.



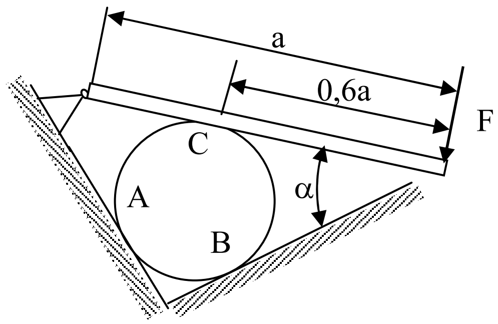
Rješenje: F_u=221,9 N; A_x= F_u=221,9 N; A_y=226,2 N.

8. Greda mase m, duljine a uležištena je u točki A i obješena je na svojem kraju o horizontalno uže. Izračunajte horizontalnu i vertikalnu komponentu reakcije u točki A te napetost užeta ako na gredu okomito djeluje sila F. Zadano je F=30N, m=20kg, α=30°.



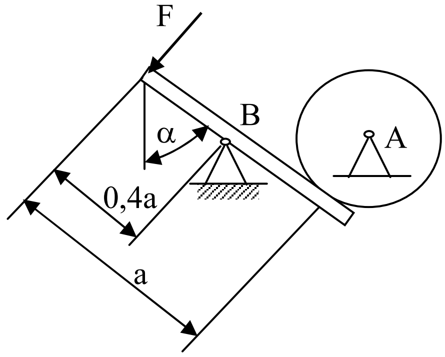
Rješenje: F_u=229,9 N; A_x= 214,9 N; A_y=222,2 N.

9. Sila F, okomita na polugu, djeluje na valjak oslonjen na pravokutnu podlogu. Izračunajte normalne komponente reakcija u točkama A, B i C. Mase poluge, valjka i trenje zanemarite! Zadano je: α=42°, F=120N.



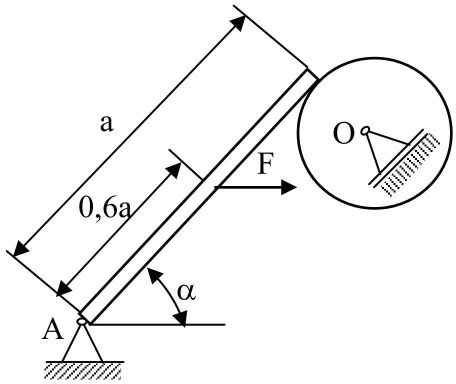
Rješenje: N_A=200,7 N, N_B=222,9 N, N_C=300,0 N.

10. Sila F djeluje okomito na polugu koja pritišče valjak. Izračunajte iznose horizontalnih i vertikalnih komponenti reakcija u točkama A, B. Trenje i mase zanemarite! Zadano je: F=100N, α=72°.



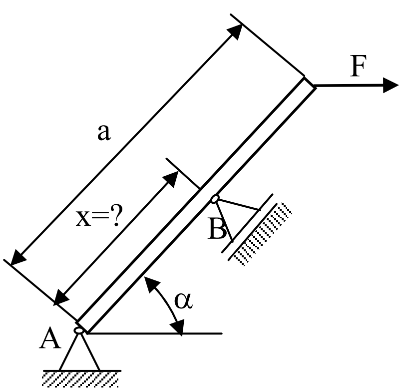
Rješenje: A_x=20,6 N, A_y=63,4 N, B_x=51,5 N, B_y=158,5 N.

11. Horizontalnom silom F djeluje se posredstvom poluge na valjak uležišten u točki O.. Koliko iznose horizontalne i vertikalne komponente sila reakcija u točkama A i O? Trenje i mase poluge i valjka zanemarite. Zadano je: α=42°, F_1=120N.



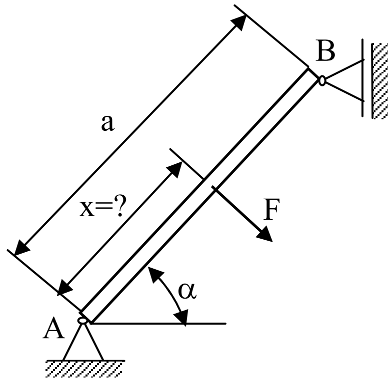
Rješenje: A_x=87,8 N, A_y=35,8 N, O_x=32,2 N, O_y=35,8 N.

12. Greda mase m, opterećena silom F, oslanja se na vertikalni zid u točki B. Kolika mora biti udaljenost x oslonca B od točke A da se ne bi prekoračio zadani iznos reakcije F_B? Kolike su tada horizontalne i vertikalne komponente sile reakcije u točki A? Zadano je: α=50°, a=700mm, m=12kg, F=200N, F_B=450N.



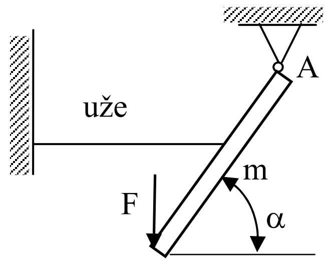
Rješenje: x=0,297m, A_x=144,7 N, A_y=171,5 N.

13. Greda mase m, opterećena silom F, oslanja se na vertikalni zid. Kolika mora biti udaljenost x hvatišta sile F od točke A da iznos reakcije u točki B ne bi prekoračio zadani iznos F_B? Kolike su tada horizontalne i vertikalne komponente sile reakcije u točki A? Zadano je: α=40°, a=800mm, m=14kg, F=400N, F_B=150N.



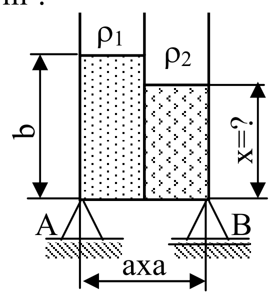
Rješenje: x=0,0876m, A_x=107,1 N, A_y=443,8 N.

14. Greda mase m, duljine a uležištena je u točki i obješena je na polovini svoje duljine o horizontalno uže. Izračunajte horizontalnu i vertikalnu komponentu reakcije u točki A te napetost užeta. Zadano je F=30N, m=20kg, α=30°.



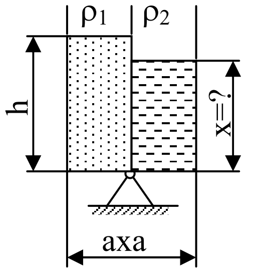
Rješenje: F_u=443,8 N, A_x=F_u= 443,8 N, A_y=226,2 N

15. Posuda kvadratnog dna (axa) po visini je pregrađena po pola. S lijeve strane nalivena je tekućina gustoće ρ_1 do visine b. Do koje visine x treba naliti tekućinu gustoće ρ_2 s desne strane ako je u osloncu B izmjeren iznos reakcije od 50N. Zadano je: b=25cm, a=24cm, ρ_1=850kg/m^3, ρ_2=998kg/m^3.



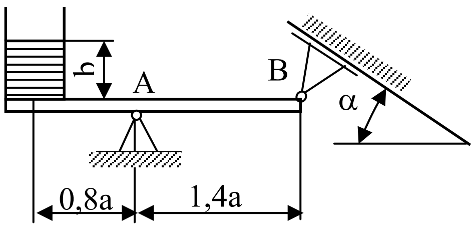
Rješenje: x=0,165 m

16. Posuda kvadratnog dna (axa) po visini je pregrađena po pola. S lijeve strane nalivena je kapljevina gustoće ρ_1 do visine h. Do koje visine x treba naliti tekućinu gustoće ρ_1 s desne strane da bi posuda bila u ravnoteži u odnosu na nepomični oslonac na kojem leži. Zadano je: ρ_1=850kg/m^3, ρ_2=998kg/m^3, h=22cm.



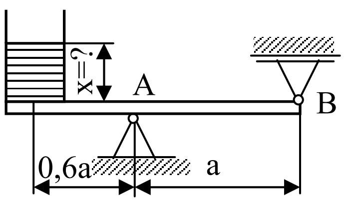
Rješenje: x=0,187 m

11. Posuda promjera D, ispunjena do visine b, vodom gustoće ρ, nalazi se na gredi. Koliko iznose horizantalna i vertikalna reakcije u točki A? Masu posude i grede zanemarite! Zadano je: b=0,2m, ρ=998kg/m^3, D=0,17m, α=30°.



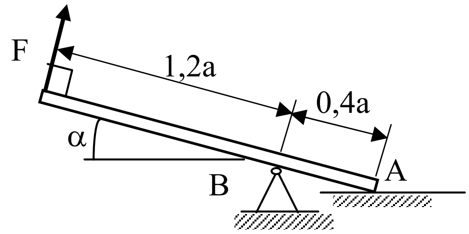
Rješenje: A_x=14,7 N, A_y=69,8 N, N_B=29,3 N.

12. Do koje visine x treba napuniti vodom gustoće ρ, posudu promjera D, koja se nalazi na gredi, a da bi iznos reakcije u točki B bio F=100N? Kolika je tada reakcija u točki A? Masu posude i grede zanemarite! Zadano je: a=0,3m, ρ=998kg/m^3, D=0,3m.



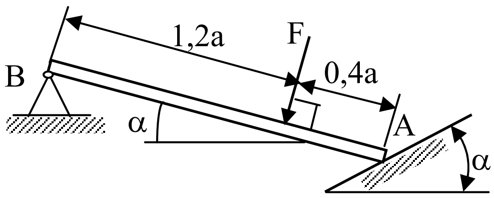
Rješenje: x=0,241 m, A_y=266,8 N

13. Sila F djeluje okomito na polugu. Izračunajte reakciju u točki A, te horizontalnu i vertikalnu komponentu reakcije u točki B. Trenje i masu poluge zanemarite! Zadano je: F=100N, α=25°.



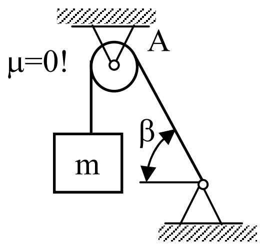
Rješenje: N_A=331,0 N, B_x=42,3 N, B_y=421,6 N.

14. Sila F djeluje okomito na polugu. Izračunajte horizontalnu i vertikalnu komponentu reakcije u točki B. Trenje i masu poluge zanemarite! Zadano je: F=100N, α=20°.



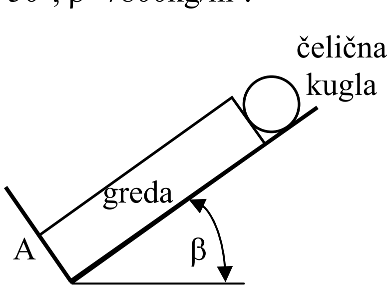
Rješenje: B_x=67,7 N, B_y=1,97 N.

15. Izračunajte rezultantu sile reakcije u osloncu A. Trenje zanemarite! Zadano je: m=4kg, β=60°.



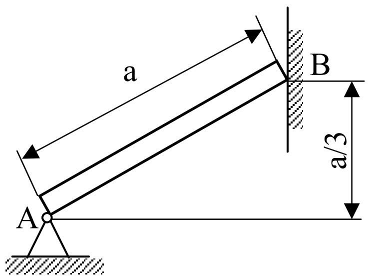
Rješenje: R_A=75,8 N

16. Čelična kugla gustoće ρ oslanja se na gredu mase m. U točki A izmjerena je sila reakcije F_A. Koliki je polumjer r čelične kugle? Trenje zanemarite! Zadano je: F_A=150N, m=3kg, β=50°, ρ=7800kg/m^3.



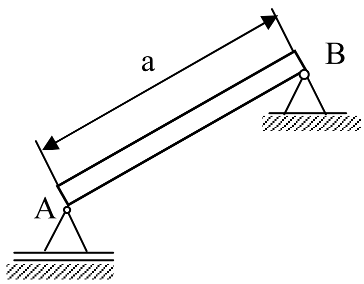
Rješenje: r=80 mm.

17. Greda mase m nalazi se u stanju ravnoteže. Odredite iznose horizontalnih i vertikalnih komponenti sila reakcija u točkama A i B. Trenje zanemarite! Zadano je: m=4,3kg.



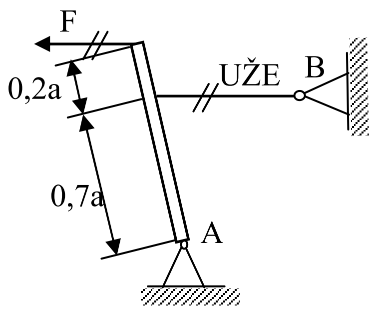
Rješenje: A_x=N_B=59,7 N, A_y=42,2 N.

18. Koliko iznosi masa m grede ako je poznat iznos reakcije N_A u pomičnom osloncu? Kolika je tada horizontalna i vertikalna komponenta reakcije u nepomičnom osloncu? Zadano je: N_A=350N.



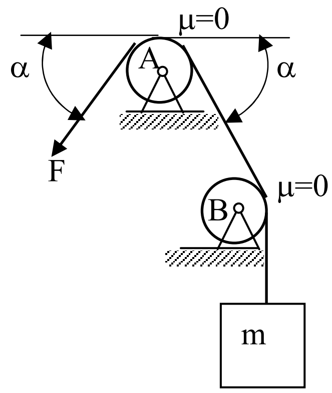
Rješenje: m=71,4 kg.

19. U užetu je izmjerena sila F_U. Koliko tada iznosi sila F kojom se djeluje na polugu prema slici 4. Koliki su tada iznosi horizantalnih i vertikalnih reakcija u točkama A i B? Zadano je: F_U=130N.



Rješenje: F=101,1 N, A_x=28,9 N, B_x=F_U=130 N.

20. Uteg mase m održava se u stanju ravnoteže silom F. Koliko iznosi masa utega ako je poznat iznos vertikalne reakcije B_x u točki B. Koliko iznose ostale horizontalne i vertikalne komponente reakcija u točkama A i B. Zadano je: B_x=70N, α=30°.

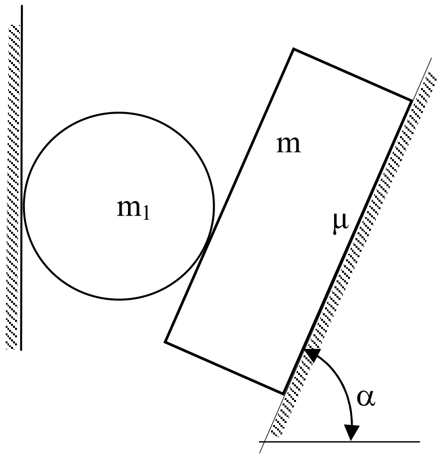


Rješenje: m=8,24 kg, A_y=80,8 N, B_y=40,4 N.

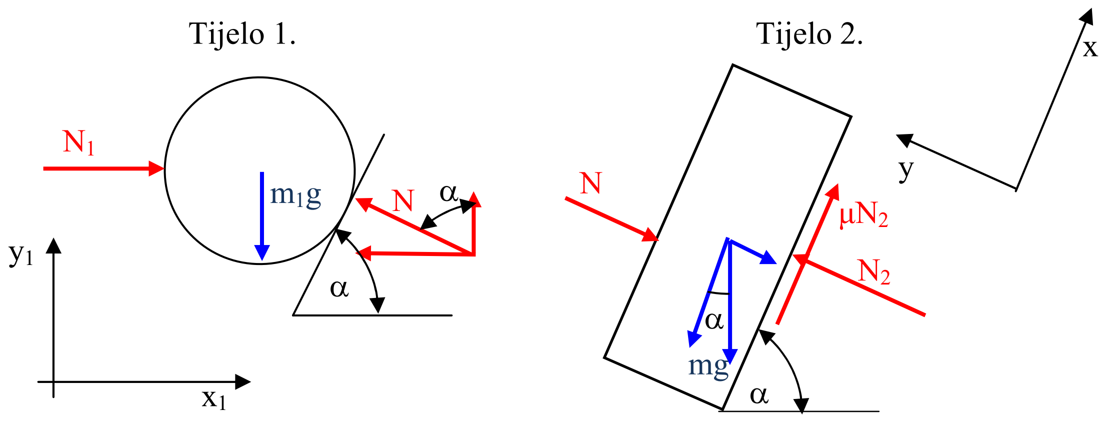
2. Trenje

2.1 Riješeni primjeri

Zadatak 1. Valjak mase m_1 oslanja se na vertikalni zid s jedne strane, a s druge na blok mase m kojeg ujedno održava u stanju ravnoteže. Odredite iznos mase m_1 valjka da bi sustav bio u ravnoteži. Trenje između valjka i zida i valjka i bloka zanemarite! Zadano je: μ=0,18, m=2,2kg, α=50°.



Rješenje: rješavanje zadataka iz trenja ni po čemu se ne razlikuje od onoga objašnjenog u poglavlju o pravilu izolacije tj. oslobađanja tijela veza. Jedina razlika je u tome što će se ovdje pojaviti jedna nova sila, **sila trenja**, kojoj ćemo morati znati odrediti orijentaciju, što ćemo ovdje i naučiti.
Oslobodimo tijela veza!



Tijela su oslobođena veza na isti način kao i prije. Jeina razlika je u tome što se između bloka (tijelo mase m) i podloge pored normalne komponente reakcije pojavila još i tangencijalna komponenta sile μN_2 koju nazivamo silom trenja. Prema tekstu zadatka među u ostalim točkama dodira dvaju tijela kao i valjka (tijela 1.) s podlogom nema trenja.
Kako odrediti orijentaciju sile trenja, smjer i iznos smo već odredili**?**
Sila trenja će se suprotstavljati gibanju tijela koje bi nastupilo u slučaju neravnoteže, a stanje ravnoteže mora se zadržati.

U ovom zadatku u slučaju neravnoteže blok mase m počeo bi kliziti prema dolje, i ovdje ne postoji drugi mogući slučaj neravnoteže, što je u drugim zadacima moguće.
Krene li se blok mase m gibati prema dolje (a to se ne smije dogoditi) sila trenja će se tome htjeti suprotstaviti što znači da će vektor sile trenja morat biti orijentiran suprotno tom gibanju tj. bit će orijentiran prema gore kao što je to na slici prikazano.
Sada možemo pristupiti postavljanju uvjeta ravnoteže za svako tijelo posebno kako je već objašnjeno, ali prije toga treba uočiti dva koordinatna sustava.
Kod rješavanja zadataka na kosini uobičajeno je odabrati koordinatni sustav koji os x ima paralelnu s nagibom kosine a os y je naravno na nju okomita. tako je za tijelo 2. odabran koordinatni sustav Oxy. Za tijelo 1. odabran je koordinatni sustav Ox_1y_1 (horizontalno – vertikalno). To su dva različita koordinatna sustava pa moraju imati različito označene koordinatne osi. Odabir koordinatnog sustava Oxy kako je prikazano olakšava nam rješavanje zadatka jer moramo rastaviti na komponente samo jednu silu i to mg.
Postavimo sada uvjete ravnoteže za svako tijelo posebno:

Tijelo 1.

$$\sum F_{x1} = 0 \qquad N_1 - N \cdot \sin\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_{y1} = 0 \qquad N \cdot \cos\alpha - m_1 \cdot g = 0 \qquad (2)$$

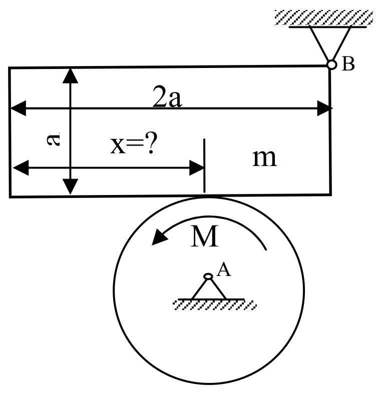
Tijelo 2.

$$\sum F_x = 0 \qquad \mu \cdot N_2 - m \cdot g \cdot \sin\alpha = 0 \qquad (3)$$

$$\sum F_y = 0 \qquad N_A \cdot \cos\alpha - m \cdot g - N_2 = 0 \qquad (4)$$

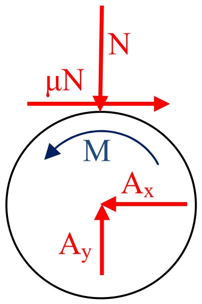
Iz (3) N_2=91,8N, to uvršteno u (4) daje N=77,98N. Sila N je veza sa drugim tijelom pa uvrštena u (2) daje traženi iznos mase m_1=5,11kg.
Jednadžba (1) nije iskorištena, ali ona vrijedi jer možemo izračunati iznos reakcije N_1 koji se ne traži.
Zašto nisu postavljane sume momenata?
Za tijelo 1. sve sile prolaze kroz središte zakrivljenosti pa je samim time njihov krak oko središta nula a smaim time i iznosi pojedinih i ukupnog momnta. Zašto? Sila težine prolazi kroz težite tijela koje je ujedno i središte zakrivljenosti, a sile reakcije leže imaju smjer koji se poklapa s polumjerima kruga pa prolaze opet kroz dredište zakrivljenosti. Podsjetimo se, normala je okomita na tangentu kružnice koja je istovremeno stranica bloka i koja definira u točki dodira dvaju tijela ravninu na koju se postavlja normala. Sumu momenata na blok mase m nije moguće postaviti jer ne znamo dimenzije tijela. Zbog trećeg uvjeta ravnoteže ona mora biti zadovoljena.

Zadatak 2. Na valjak polumjera R koji se može slobodno okretati oko točke A djeluje moment M, a istovremeno ga pritišće blok mase m. Odredite udaljenost x da bi sustav bio u ravnoteži! Zadano je: μ=0,18, R=0,4m, M=1,2Nm, m=2,2kg, a=0,3m.

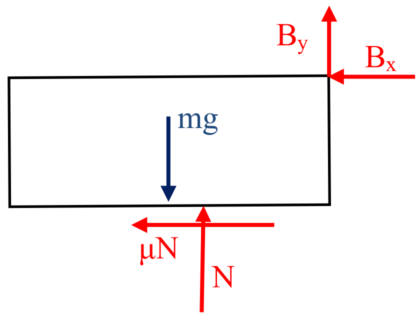


Oslobodimo tijela veza:

Tijelo 1.



Tijelo 2.



Postavimo uvjete ravnoteže za oba tijela, samo sume momenata oko točaka A i B.
Tijelo 1.

$$\sum M_A = 0 \qquad M - \mu \cdot N \cdot R = 0$$

Ostale sile prolaze kroz središte kruga pa nemaju momenta oko točke A.
Druga važna činjenica je da nam ovaj izraz omogućuje odrediti točnu orijentaciju sile trenja i to koristeći očitu činjenicu da moment M mora imati suprotni moment od momenta sile trenja oko točke A. To je samo dosljedna primjena pravila desne ruke. Pogriješimo li ovdje sila trenja će imati krivu orijentaciju i na tijelu 2. što će nas dovesti do pogrešnog rješenja.
Iz ove jednadžbe dobivamo vrijednost sile N.

$$N = \frac{\mu \cdot N}{R} = 16,67N$$

Tijelo 2.

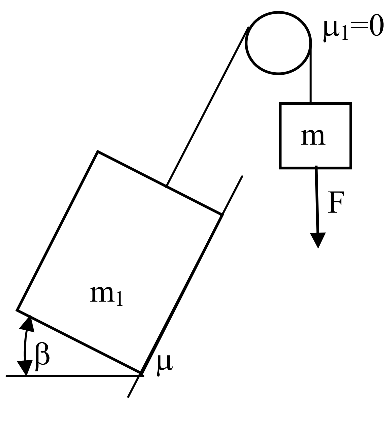
$$\sum M_B = 0 \qquad m \cdot g \cdot a - \mu \cdot N \cdot a - N \cdot (2 \cdot a - x) = 0$$

Sređivanjem izraza i uvrštavanjem vrijednosti sile N dobivamo traženu udaljenost x.

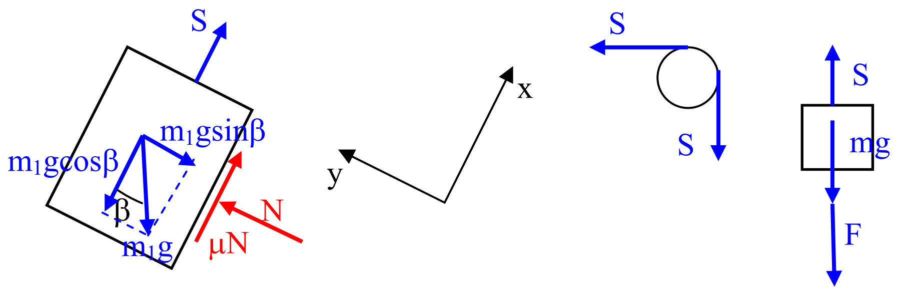
$$x = a \cdot \left(2 + \mu - \frac{m \cdot g}{N} \right) = 0,266m$$

I na kraju. Što sa sumama sila. One moraju biti zadovoljene. Postavite ih pa ćete vidjeti, ali iz njih ćemo moći izračunati vrijednosti reakcija u nepomičnim osloncima, a to se ne traži u tekstu zadatka. Zato nisu ni postavljane.

Zadatak 3. Uteg mase m preko užeta održava masu m_1 u ravnoteži. Kolikom minimalnom silom F treba povlačiti masu m prema dolje da se ona ne bi počela podizati?. Zadano je: m_1=4kg, m=1,5kg, μ=0,11, β=35°.



Početak rješavanja zadataka s trenjem identičan je rješavanju prethodnik zadataka. Tijelo prvo treba osloboditi veza (izolirati!)



Komentar: kao reakcija podloge na tijelo mase m_1 pojavljuje se normalna komponenta (okomita na ravninu podlogu) uvijek orijentirana prema tijelu, te tangencijalna komponenta μN (u smjeru ravnine podloge) koja se naziva sila trenja. Te dvije komponente su međusobno okomite! Orijentacija vektora sile trenja određuje se prema smjeru gibanja koje bi nastupilo u slučaju neravnoteže (to se iščitava iz teksta zadatka). U ovom zadatku bi se prema tekstu, masa m počela gibati prema gore u slučaju neravnoteže, što bi za posljedicu imalo spuštanje mase m_1 niz kosinu. Stoga je orijentacija vektora sile trenja μN prema gore. Također treba uočiti da je sila u oba kraka užeta jednaka (S) jer između užeta i nepomičnog valjka (podloge) nema trenja a ovakva orijentacija sile S osigurava napetost užeta!

Napomena: pri rješavanju zadataka iz sile trenja na kosini uobičajeno je odabrati koordinatni sustav definiran nagibom kosine (kao na slici). Time se pojednostavljuje rješavanje u trigonometrijskom smislu.

Postavljanje analitičkih uvjeta ravnoteže za masu m_1:

$\Sigma F_x=0$: $S- m_1\cdot g\cdot\cos\beta+ \mu\cdot N=0$ (1) $\Sigma F_y=0$: $N- m_1\cdot g\cdot\sin\beta=0$ (2)

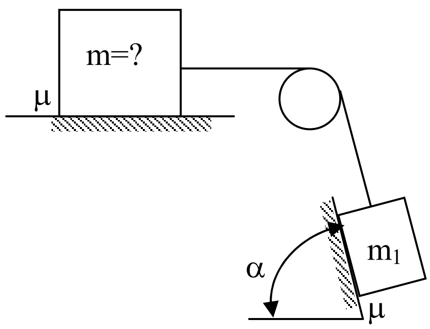
Iz uvjet ravnoteže za masu m računa se sila u užetu S (trenja užeta o podlogu nema, zadano je $\mu_1=0$):

$S- m\cdot g- F=0$ (3)

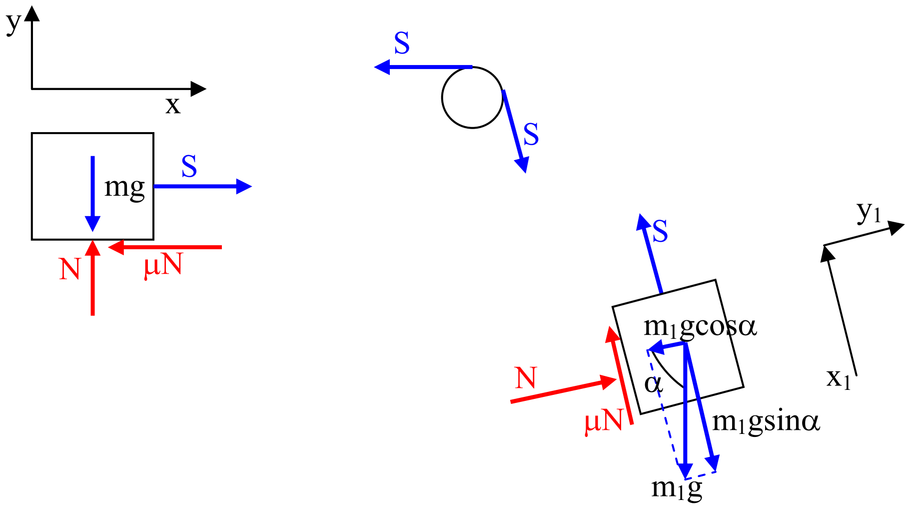
Iz (2) slijedi $N= m_1\cdot g\cdot\sin\beta$, a iz (3) slijedi $S= m\cdot g+ F$ što uvrštavanjem u (1) daje:

$$\underline{F=14{,}95N}$$

Zadatak 4. Odredite minimalni iznos mase m da je masa m_1 ne bi povukla za sobom. Zadano je $\mu=0{,}15$, $m_1=4kg$, $\alpha=55°$.



Ovaj zadatak se rješava na sličan način kao i prethodni. Iz teksta zadatka je vidljivo da bi u slučaju neravnoteže masa m_1 počela kliziti niz kosinu, a za sobom bi povlačila masu m obzirom da su te dvije mase povezane u sustav užetom koje mora biti napeto. Nakon oslobađanja tijela veza mogu se postaviti uvjeti ravnoteže za obje mase.



Opet je radi lakšeg rješavanja korisno odabrati dva koordinatna sustava. Veza između dva tijela je uže u kojem vlada sila S i to u oba kraka jer nema trenja između užeta i podloge.

Za masu m (i koordinatni sustav Oxy) vrijedi:

$\Sigma F_x = 0: \quad -\mu \cdot N + S = 0 \quad (1) \qquad \Sigma F_y = 0: \quad -m \cdot g + N = 0 \quad (2)$

Za masu m_1 (i koordinatni sustav Ox_1y_1) vrijedi:

$$\Sigma F_{x_1} = 0: \quad -S - \mu \cdot N_1 + m_1 \cdot g \cdot \sin\alpha = 0 \quad (3)$$

$$\Sigma F_{y_1} = 0: \quad N_1 - m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha = 0 \quad (4)$$

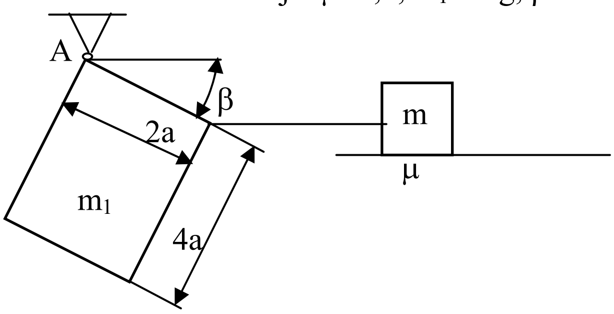
Iz (4) je $N_1 = m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha$ što uvršteno u (4) daje iznos sile S:

<u>S=28,8N</u>

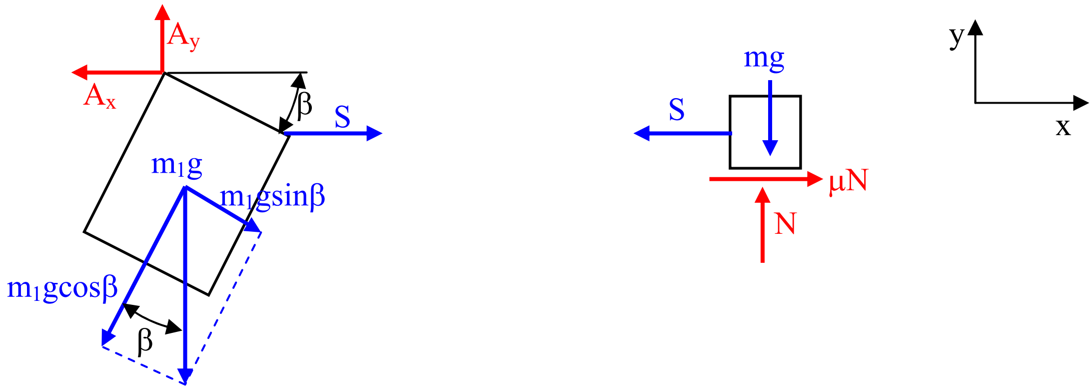
Iz (2) je $N = m \cdot g$ što uvršteno u (1) daje minimalni iznos mase m da bi sustav ostao u ravnoteži:

<u>m=19,5kg</u>

Zadatak 5. Uteg mase m preko užeta održava masu m_1 u ravnoteži. Koliki je minimalni iznos m da bi sustav bio u ravnoteži? Zadano je: μ=0,2, m_1=4kg, β=20°.



Nakon oslobađanja tijela veza može se za svaku masu postaviti uvjete ravnoteže.



Za masu m postavlja se suma momenata oko točke A kako bi se isključile reakcije koje se javljaju zbog veze s nepomičnim osloncem u toj točki. Sume sila mogu se postaviti, ali to u ovom zadatku nije potrebno jer nam za nastavak rješavanja nisu potrebni iznosi reakcija u točki A. Bez obzira na to, ti uvjeti ravnoteže moraju biti zadovoljeni.

$$\Sigma M_A = 0: \qquad S \cdot 2 \cdot a \cdot \sin\beta + m_1 \cdot g \cdot \sin\beta \cdot \frac{4 \cdot a}{2} - m_1 \cdot \cos\beta \cdot \frac{2 \cdot a}{2} = 0 \qquad (1)$$

Za masu m uvjeti ravnoteže su za odabrani koordinatni sustav Oxy:

$$\Sigma F_x = 0: \qquad -S + \mu \cdot N = 0 \qquad (2)$$
$$\Sigma F_{y_1} = 0: \qquad -m \cdot g + N = 0 \qquad (3)$$

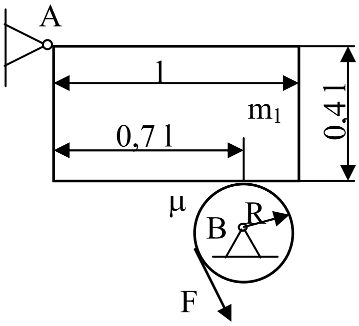
Iz (1) se može izračunati iznos sile u užetu S:

$$\underline{S=14{,}7N}$$

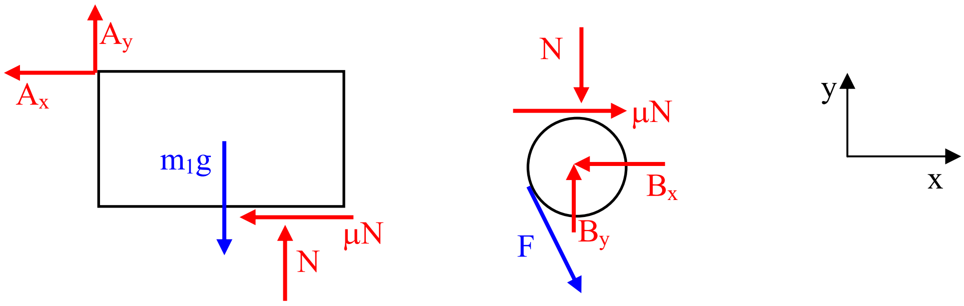
Iz (3) je $N = m \cdot g$ što uvršteno u (2) daje minimalni iznos mase m da bi sustav ostao u ravnoteži:

$$\underline{m=7{,}49kg}$$

Zadatak 6. Odredite minimalni iznos m_1 potrebne da bi se zakočio valjak polumjera R na koji djeluje sila F. Zadano je:F=30N, μ=0,11.



Nakon oslobađanja tijela veza može se za svaku masu postaviti uvjete ravnoteže.



Kao i u prethodnom zadatku zadatak se može riješiti postavljanjem sume momenata oko točaka A i B.
U točki dodira između mase m_1 i valjka djeluje sila trenja koje je orijentaciju vektora nužno točno odrediti. To je lakše odrediti ako se prvo postavi suma momenata oko točke B odnosno za valjak:

$$\Sigma M_B = 0: \qquad F \cdot R - \mu \cdot N \cdot R = 0 \qquad (1)$$

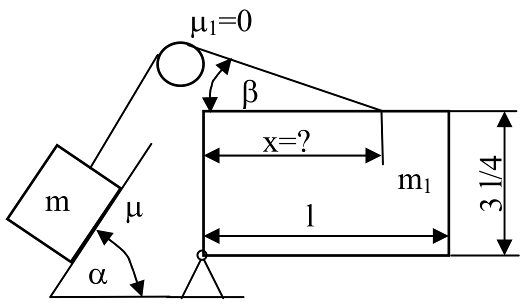
Očito je da jedino ovako orijentirana sila trenja može u sumi momenata dati 0 (nulu).
Ako sila trenja ima ovakvu orijentaciju na valjku onda ta ista sila kad djeluje na masu m_1 mora imati suprotnu orijentaciju. Isto vrijedi i za normalnu komponentu.
Suma momenata oko točke A glasi:

$$\Sigma M_A = 0: \qquad -m_1 \cdot g \cdot \frac{l}{2} - \mu \cdot N \cdot 0,4 \cdot l + N \cdot 0,7 \cdot l = 0 \qquad (2)$$

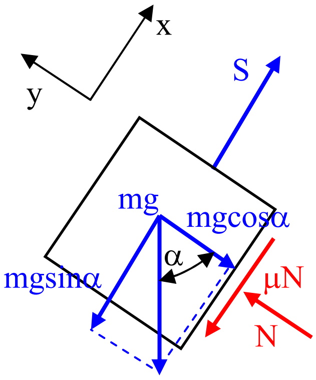
iz (1) slijedi $N = 272,7\text{N}$ što uvršteno u (2) daje minimalni iznos mase m_1 koji će biti dovoljan da ne dođe do zakretanja valjka pod djelovanjem sile F tj. do njegova proklizavanja:

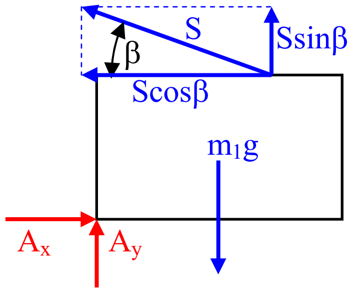
$$\underline{m_1 = 36,5\text{kg}}$$

Zadatak 7. Odredite udaljenost x na kojoj treba učvrstiti uže da uteg mase m_1 ne bi pao.
Zadano je: m=2kg, m_1=2,2kg, l=0,4m, μ=0,09, α=35°, β=15°.



Nakon oslobađanja tijela veza može se za svaku masu postaviti uvjete ravnoteže.





Za masu m na kosini za koordinatni sustav Oxy vrijedi:

$$\Sigma F_x = 0: \qquad S - \mu \cdot N - m \cdot g \cdot \sin\alpha = 0 \qquad (1)$$
$$\Sigma F_{y_1} = 0: \qquad -m \cdot g \cdot \cos\alpha + N = 0 \qquad (2)$$

iz (2) je $N = m \cdot g$ što uvršteno u (1) daje vrijednost sile u užetu:

<u>S=12,7N</u>

Suma momenata oko točke A za blok mase m_1 mora biti jednaka nuli:

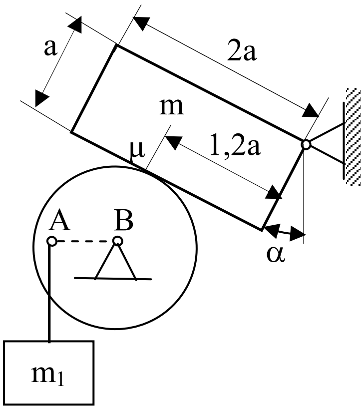
$$\Sigma M_A = 0: \qquad -m_1 \cdot g \cdot \frac{l}{2} + S \cdot \sin\beta \cdot x + S \cdot \cos\beta \cdot \frac{3}{4} \cdot l = 0 \qquad (3)$$

iz čega je moguće izračunati udaljenost x na kojoj treba pričvrstiti uže da bi zadani sustav bio u ravnoteži:

<u>x=0,194m</u>

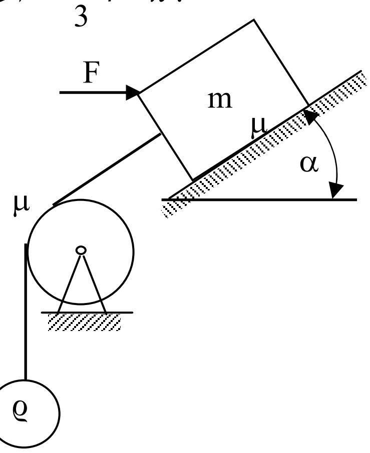
2.2. Primjeri za samostalno rješavanje

1. Blok mase m oslanja se na valjak polumjera R. U točki A na valjku obješen je uteg mase m_1. Izračunajte maksimalni iznos mase m_1 da bi sustav još bio u ravnoteži! Zadano je:, m=3,5kg, μ=0,14, α=30°. Točka A nalazi se na tri četvrtine polumjera udaljenosti od točke B. Točke A i B leže na istom vodoravnom pravcu!



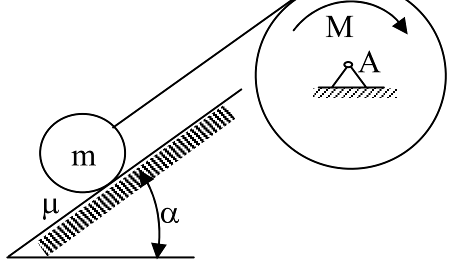
Rješenje: m_1=0,544 kg.

2. Drvena kugla polumjera r i gustoće ϱ spojena je užetom s blokom mase m kojeg gura horizontalna sila F. Koliko mora biti minimalni iznos sile F da bi sustav još bio u stanju ravnoteže? Zadano je: μ=0,21; r=50mm, m=1,5kg, α=10° ϱ=930kg/m^3. Uputa: volumen kugle računajte prema izrazu $V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$.



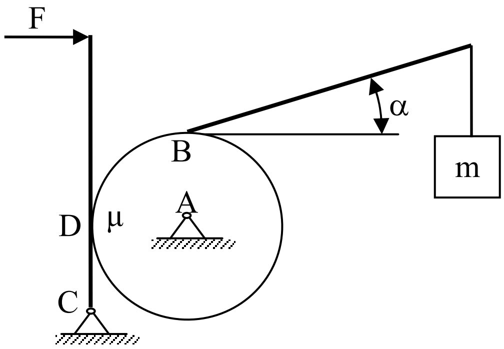
Rješenje: 3,01 N.

3. Na obodu valjka polumjera R koji se može slobodno okretati oko točke A užetom je pričvršćen valjak polumjera R i mase m. Izračunajte minimalni iznos momenta M koji djeluje na valjak da bi sustav bio u ravnoteži! Zadano je: μ=0,18, R=0,4m, m=5,2kg, α=25°.



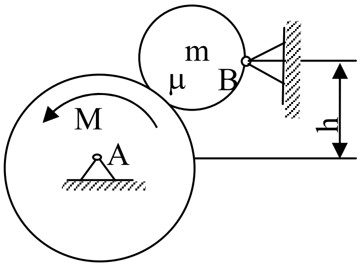
Rješenje: 5,29 Nm.

4. Na kružnu ploču polumjera R u točki B pričvršćena (zavarena) je poluga duljine ℓ na čiji je kraj obješen uteg mase m. Da bi sustav bio u ravnoteži na ploču u točki D posredstvom poluge duljine ℓ_1 djeluje sila F. Odredite iznos sile F da bi sustav bio u ravnoteži. Zadano je: m=2kg, α=10°, μ=0,23, $|CD| = \frac{1}{3}\ell_1$, ℓ=800mm, R=250mm. Napomena: točke A i B nalaze na istom vertikalnom pravcu, a poluga pričvršćena u točki B nije tangenta na kružnicu!



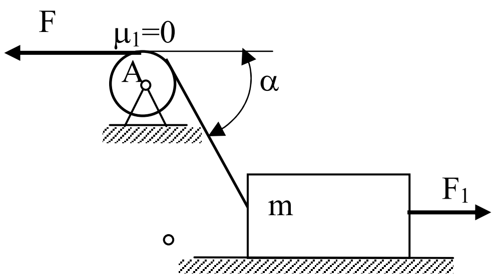
Rješenje: F=89,6 N.

5. Na valjak većeg polumjera R koji se može slobodno okretati oko točke A djeluje moment M, a istovremeno ga pritišće valjak polumjera r nepoznate mase m. Koliko iznosi masa m manjeg valjka da bi sustav bio u ravnoteži? Zadano je: μ=0,18, h=0,48m, R=0,4m, r=0,15m, M=1,2Nm. Napomena: središte manjeg valjka i točke B nalaze se na istom horizontalnom pravcu.



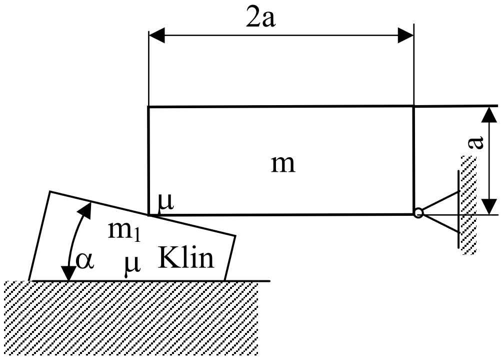
Rješenje: 1,94 kg.

6. Kolikom maksimalnom silom F se smije povlačiti uže da blok mase m, na koji djeluje sila F_1, ne bi kliznuo ulijevo. Zadano je: m=3kg, F_1=12N, μ=0,16, α=50°.



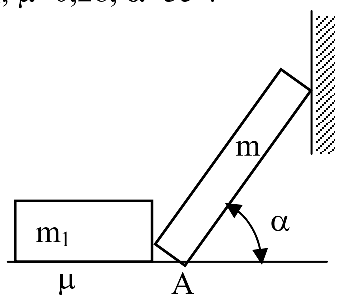
Rješenje: F=21,8 N.

7. Masa m pritišče klin mase m_1. Ako je poznat iznos normalne reakcije N_1 između mase m_1 i podloge koliko smije maksimalno iznositi masa m da bi sustav još bio u ravnoteži ? Zadano je: N_1=35N, μ=0,18, α=25°.



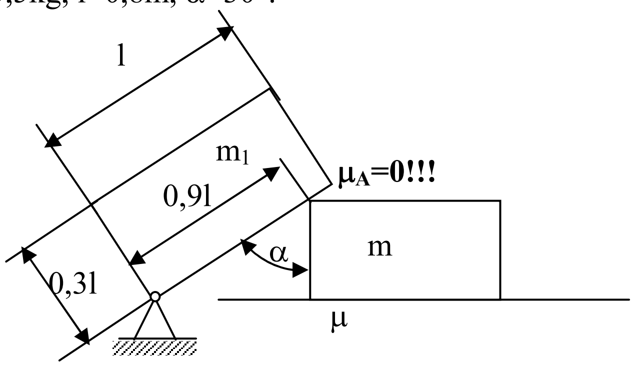
Rješenje: 4,86 kg.

8. Štap duljine l oslonjen je o vertikalni glatki zid, a da ne klizne pridržava se masom m_1. Između podloge i štapa vlada trenje kao i između podloge i mase m_1. Između štapa i mase m_1 nema trenja. Koliki mora biti minimalni iznos mase m_1 da bi štap još bio u ravnoteži. Zadano je m=2kg, μ=0,28, α=35°.



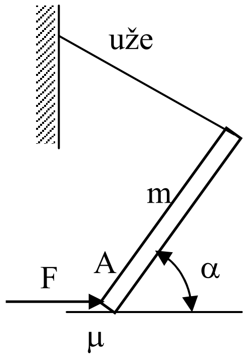
Rješenje: m_1=3,1 kg.

9. Odredite minimalni iznos mase m da bi sustav masa bio u ravnoteži (slika 3.). Zadano je: μ=0,28, m_1=3,5kg, l=0,8m, α=30°.



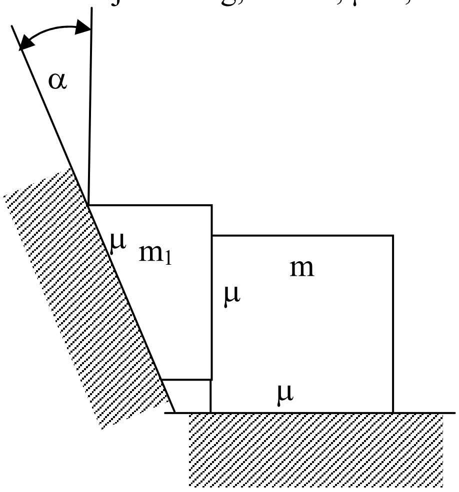
Rješenje: m=1,21 kg.

10. Uže pričvršćeno pod pravim kutem pridržava štap duljine l koji je istovremeno oslonjen o podlogu u točki A. Kolika mora biti minimalna masa štapa m da ne bi bio odgurnut silom F koja djeluje u točki A? Zadano je: F=30N, μ=0,16, α=55°.



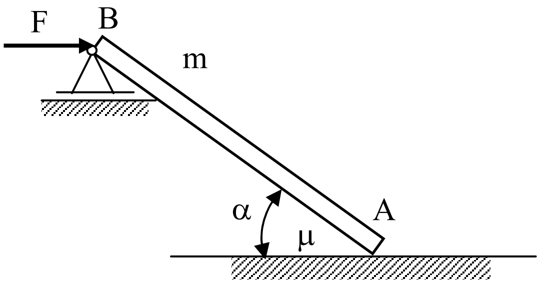
Rješenje: m=13,27 kg.

11. Klin mase m_1 pridržava se blokom mase m. Odredite maksimalni iznos mase m_1 da bi sustav bio u ravnoteži.? Zadano je:m=5kg, α=30°, μ=0,16.



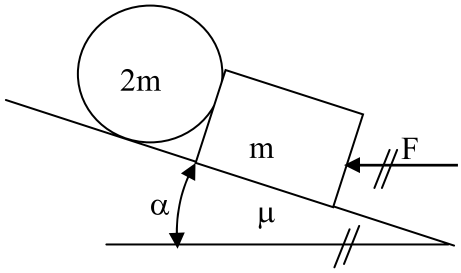
Rješenje: m_1=0,67 kg.

12. Odredite minimalni iznos koeficijenta trenja μ da bi štap mase m i duljine b oslonjen o horizontalnu glatku podlogu u točki B još bio u stanju ravnoteže. Zadano je, F= 20N, m=5,2kg, α=35°.



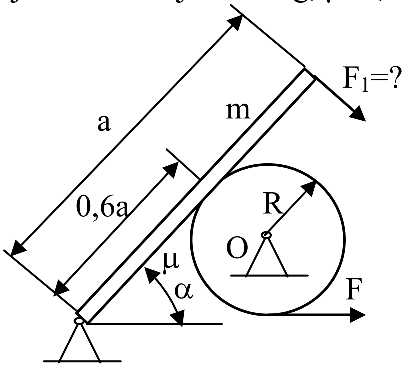
Rješenje: μ=0,51.

13. Valjak mase 2m oslanja se na blok mase m. Kolikom silom F treba pridržavati blok da se on ne bi počeo gibati niz kosinu? Trenje između valjka i bloka i valjka i podloge zanemarite! Zadano je: m=4kg, μ=0,18, α=20°.



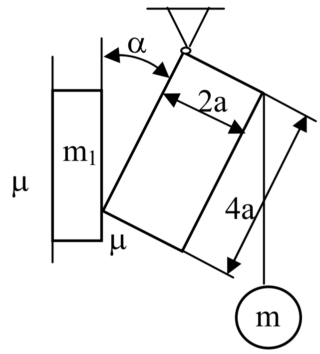
Rješenje: F=33,6 N.

14. Silom F_1 djeluje se posredstvom poluge mase m na valjak uležišten u točki O. Kolikom silom F_1, okomitom na polugu, treba djelovati na polugu da bi se uravnotežila sila F koja djeluje na obodu valjka? Zadano je: m=2kg, μ=0,17, α=40°, F=120N.



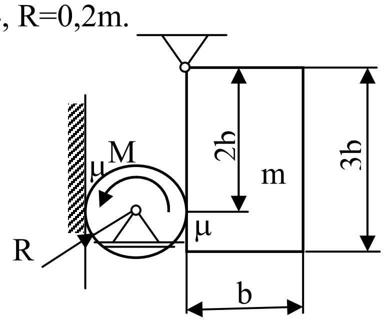
Rješenje: F_1=416,0 N.

15. Uteg mase m obješen je na blok zanemarive mase koji pritišće blok mase m_1 na vertikalni zid. Odredite iznos mase m_1 da bi zadani sustav bio u stanju ravnoteže. Zadano je: m=2kg, μ=0,17, α=23°.



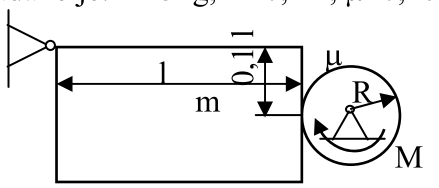
Rješenje: m_1=0,32 kg.

16. Valjak, uležišten na pomičnom osloncu, opterećen momentom M, s jedne se strane oslanja na vertikalnu podlogu, a s druge strane ga pritišće blok mase m? Kolikim se momentom M smije djelovati na valjak da bi zadani sustav bio u stanju ravnoteže? Zadano je: m=3kg, μ=0,14, R=0,2m.



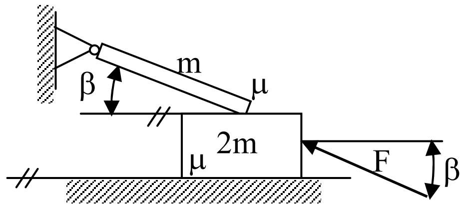
Rješenje: M=0,412 Nm.

17. Odredite iznos momenta M potrebnog da bi se zakočio valjak polumjera R na koji djeluje blok mase m. Zadano je: $m=3kg$, $R=0,1m$, $\mu=0,16$.



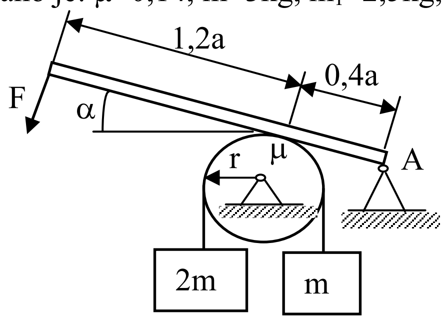
Rješenje: M=3,92 Nm.

18. Odredite iznos mase m da sustav zadan ostane u stanju ravnoteže. Zadano je: $F=25N$, $\mu=0,16$, $\beta=25°$.



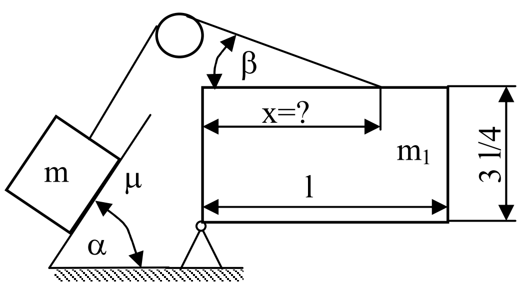
Rješenje: m=16,9 kg.

19. Odredite iznos sile F kojom treba djelovati okomito na polugu mase m_1 kojom se koči valjak, da bi sustav zadan bio ravnoteži! Kolike su horizontalne i vertikalne komponente reakcije u točki A? Zadano je: $\mu=0,14$, $m=3kg$, $m_1=2,5kg$, $\alpha=25°$.



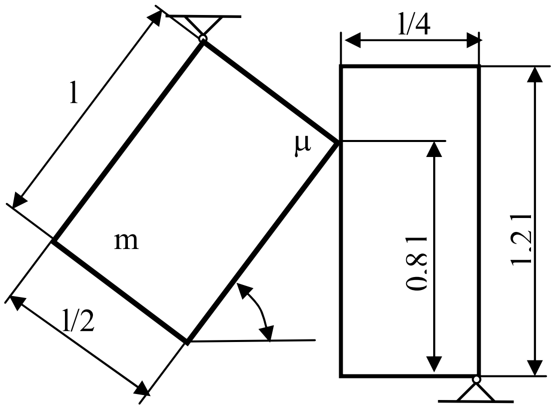
Rješenje: F=44,1 N; A_x=44,65 N, A_y=137,95 N.

20. Odredite iznos duljine x na kojoj treba učvrstiti uže da uteg mase m_1 ne bi pao. Zadano je: $m=2kg$, $m_1=2,2kg$, $l=0,4m$, $\mu=0,09$, $\alpha=35°$, $\beta=15°$.



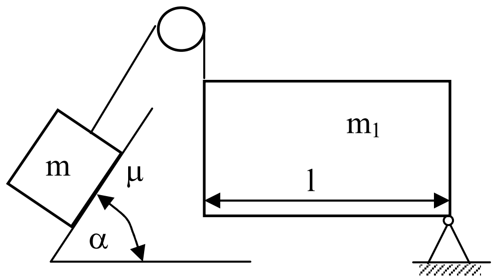
Rješenje: x=0,194 m.

21. Odredite iznos mase m, da blok mase m_1 ne padne u desno. Zadano je: m_1=3kg, μ=0,12, α=40°.



Rješenje: m=0,746 kg.

22. Odredite iznos mase m utega da se on ne bi počeo gibati prema gore. Zadano je: m_1=3kg, μ=0,11, α=18°.

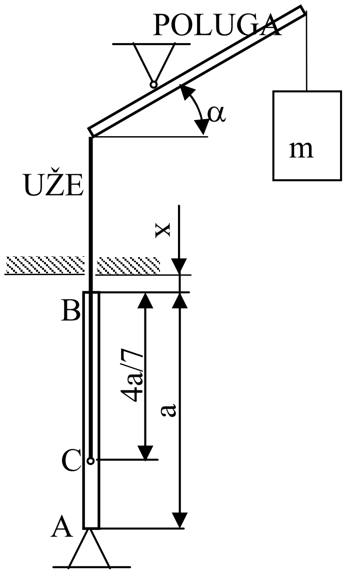


Rješenje: m=3,63 kg.

3. Aksijalno opterećenje štapova

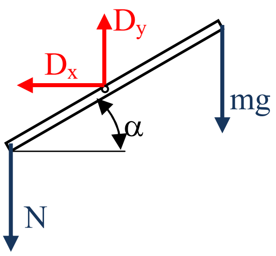
3.1. Riješeni primjeri

Zadatak 1. Vertikalni štap zanemarive mase, duljine a i površine poprečnog presjeka A učvršćen je u točki A za podlogu, a u točki C štap je posredstvom užeta pričvršćen za polugu zanemarive mase. Na drugi kraj poluge obješen je uteg mase m. Nepomični oslonac koji drži polugu nalazi se na 3/5 duljine poluge od točke u kojoj je pričvršćen uteg. Kolika mora biti masa m da bi štap gornjim krajem dotaknuo nepomični zid koji se nalazi udaljen za x od vrha neopterećenog štapa? Koliko je naprezanje u štapu u trenutku kada štap dotakne zid (uključujući i predznake)? Zadano je: a=700mm, A=90mm^2, x=0,15mm, E=85000MPa.



Na prvi pogled djeluje komplicirano, ali nije. Zadatak ima dva dijela, prvi dio je gradivo koje smo usvojili u poglavlju oslobađanja tijela veza. To je poluga koja ovdje služi kao veza između utega mase m i užeta koje je pričvršćeno za štap AB te ga na taj način opterćuje. Krenimo redom i oslobodimo tijela veza!

Poluga

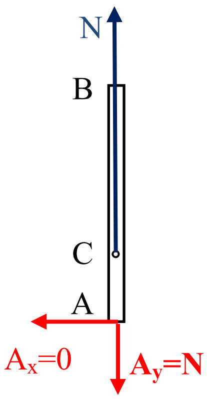


$$\sum M_D = 0 \qquad N \cdot \frac{2}{5} \cdot \ell \cdot \cos\alpha - m \cdot g \cdot \frac{3}{5} \cdot \ell \cdot \cos\alpha = 0$$

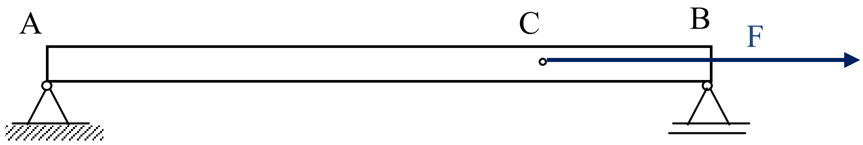
slijedi:

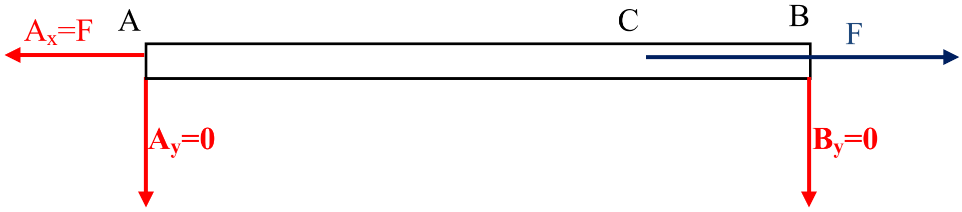
$$m = \frac{2 \cdot N}{3 \cdot g} \qquad (1)$$

Ovo je sve gradivo iz prethodnog poglavlja pa ne treba nikakvih posebnih komentara. Da bi izračunali masu m moramo nekako doći do iznosa sile napetosti užeta N.
Pogledajmo što se događa sa štapom tj. oslobodimo i njega veza!



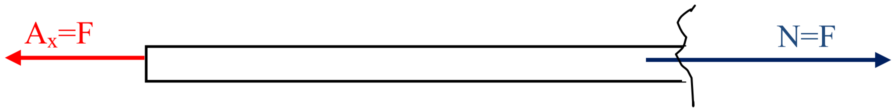
Slika sada već izgleda puno jednostavnije. Iz onoga što smo naučili u prethodnom poglavlju vidimo, a možemo lako i dokazati, zašto su iznosi reakcija u točki A takvi kao su na slici navedeni. U pravilu nećemo morati postavljati uvjete ravnoteže jer ćemo se uvijek baviti situacijom da djeluje samo jedna sila. Napomena: sila N je istog iznosa kao i ona gore nacrtana na poluzi, ovdje je ona dulje nacrtana zbog preglednosti.
Ono što je novo i što sada moramo naučiti je sljedeće!
Sila N djeluje (ima hvatište) u točki C i to moramo uvijek primijetiti. Nije svejedno gdje će biti hvatište sile jer ovdje se bavimo deformabilnim tijelom, a sva tijela (materijali) u prirodi odn. tehnici su takva. Podsjetimo se da smo u prethodnom poglavlju razmatrali kruta tj. idealna tijela!
Prema tome štap će se pod djelovanjem sile N deformirati tj. mijenjat će svoju duljinu, u konkretnom slučaju produljit će se. Radi se o malim produljenjima, uglavnom oku nevidljivim što ćemo i vidjeti iz rezultata.
Štap je aksijalno opterećen što znači da sila N leži u osi (simetrije) štapa.
Ilustrirajmo ovo sljedećom slikom!
Štap je horizontalno položen, ali obzirom da je masa zanemariva isto će se događati bude li on bilo u kojem položaju.





Sila F kao aktivna sila i crveno obojane reaktivne sile od koji je samo A_x različita od nule su vanjske sile. Te vanjske sile izazivaju opterećenja na unutarnjem presjeku/presjecima štapa.

Do unutarnjeg presjeka ćemo doći tako što ćemo si zamisliti da smo na proizvoljnom mjestu prepili štap.



Presjek iscrtan krivudavom linijom je unutarnji presjek, na njega djeluje unutarnja sila N koja se javlja kao posljedica djelovanja vanjske sile A_x=F. Kao rezultat pojavit će se u presjeku normalno naprezanje σ.
Ovako opterećen štap se pod djelovanjem vanjske sile F produljuje (razvlači) a u njemu nastupa vlačno naprezanje pozitivnog predznaka (σ>0!) jer je za ovu situaciju unutarnja sila N pozitivna (N>0!). Bude li sila F suprotno orijentirana promijenit će se i orijentacija sile A_x. U tom slučaju štap će se skratiti (stlačiti) te će u njemu nastupiti tlačno naprezanje negativnog predznaka (σ<0!) jer je za ovu situaciju unutarnja sila N negativna (N<0!).

Deformacija tj. produljenje odn. skraćenje pojavit će se između točaka u kojima je unutranja sila N različita od nule, a to je uvijek između nepomičnog oslonca i hvatišta uzdužne sile!

Vratimo se sada rješenju našeg zadatka!

Sila N ima hvatište u točki C pa će prema prethodno rečenom deformacija štapa nastupiti između nepomičnog oslonca u točki A i točke C u kojoj je hvatište sile N.
Prema iznosu koji ste dobili na predavanju ta deformacija mora biti x koji je udaljenost između kraja štapa i nepomičnog zida pa je:

$$x = \Delta\ell_C = \frac{N \cdot \frac{3}{7} \cdot a}{A \cdot E} \qquad (2)$$

$\Delta\ell_C$ je uobičajena oznaka za pomak točke C izazvan produljenjem štapa između točaka A i C.
$\frac{3}{7} \cdot a$ je udaljenost između točaka A i C odnosno između nepomičnog oslonca i hvatišta sile N u točki C. Dobivena je kao $a - \frac{4}{7} \cdot a = \frac{3}{7} \cdot a$. Pazite na to!

Iz izraza (2) dobiva se iznos sile

N=3825N

koji uvršten u izraz (1) daje traženi iznos mase utega

m=259,9kg.

Naposljetku, izračunajmo naprezanja u štapu prema općem izrazu:

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

Naprezanje σ bit će različito od nule onda kad je (drukčije rečeno tamo gdje je) unutarnja sila različita od nule!
Zvuči i je jednostavno ali ipak često nije jasno. Uzimajući u obzir tu činjenicu naprezanje u cijelom štapu nije jednako.

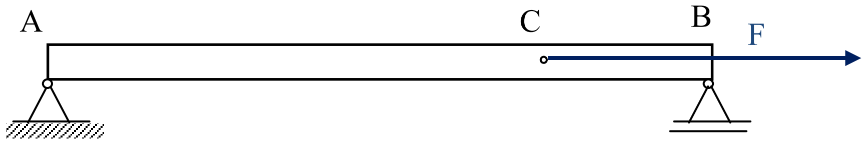
Između točaka A i C unutarnja sila N>0 pa je naprezanje:

$\sigma_{A-C} = \frac{N}{A} = 42,5MPa$, pozitivno je jer je N>0.

Između točaka C i B unutarnja sila N=0! Zašto? Zato jer sila N djeluje u točki C pa je štap između točke C i B neopterećen pa je:

$\sigma_{C-B} = 0$

Što se događa s pomacima točaka koje se nalaze između točaka C i B? Zbog činjenice da je između te dvije točke sila N=0 sve točke pomaknut će se za isti iznos za koji se pomaknula zadnja točka u kojoj je $N \neq 0$ a to je točka C u kojoj je hvatište sile N.
Evo još jedne ilustracije!
Nacrtajmo dvije tipične situacije opterećenja.
Prva je već prethodno nacrtana. Duljinu štapa označimo sa ℓ

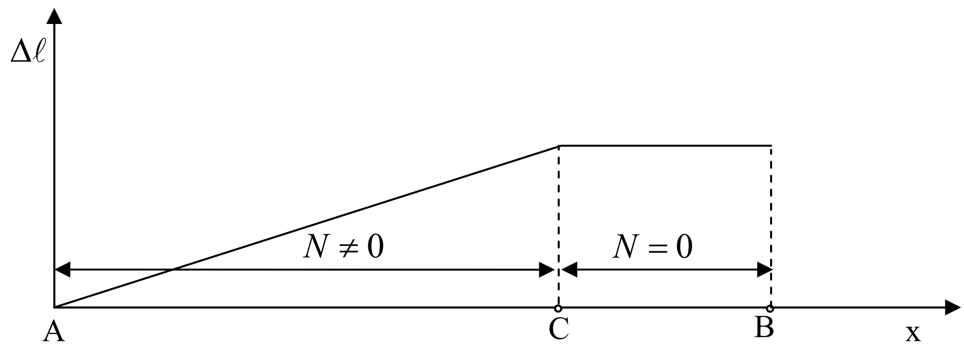


Napišimo izraz za pomak točke:

$\Delta\ell = \frac{N \cdot x}{A \cdot E}$ gdje x udaljenost proizvoljne točke na štapu od točke u kojoj se nalazi čvrsti oslonac u točki A. Prema tome $0 \leq x \leq \ell$.
Za zadanu situaciju sila N=F=konst., a isto tako je umnožak u nazivniku AE=konst. jer je štap nepromjenjivog poprečnog presjeka A i od istog je materijala istog modula elastičnosti E.
Možemo prethodni iznos napisati u obliku:

$\Delta\ell = k \cdot x$

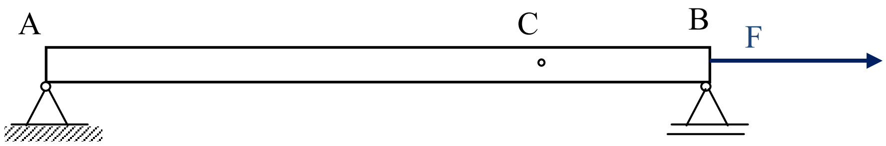
To je jednadžba pravca tj. afina funkcija. Jednostavnije rečeno pomak točke linearno je ovisan o položaju točke.
Predočimo to grafički tj. nacrtajmo dijagram pomaka točke u ovisnosti o njenom položaju tj. koordinati x.



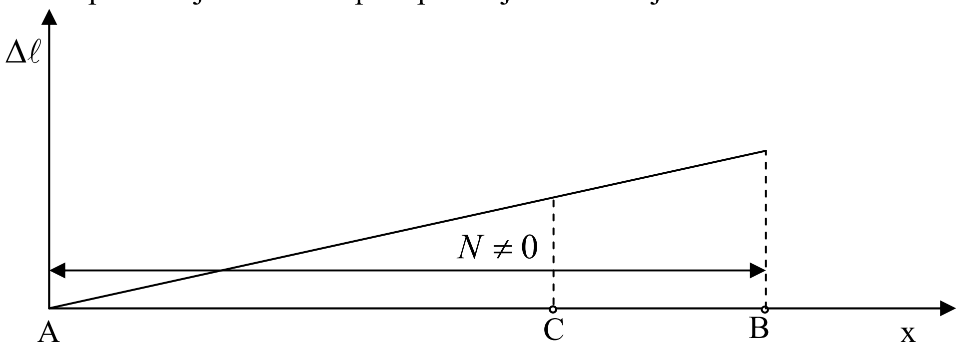
$\Delta\ell_C = \frac{N \cdot x_C}{A \cdot E}$ $\quad \Delta\ell_B = \Delta\ell_C$

Ovdje je grafički predočeno ono što je prethodno prokomentirano za pomake točaka

Evo ilustracije još jedne tipične situacije, a to je kad je hvatište sile na kraju štapa.



Svi prethodno navedeni izrazi i komentari ostaju isti, jedino što se promijenilo je položaj hvatišta sile F koje se sda nalazi na kraju štapa tj. u točki B. Prema tome, dijagram ovisnosti pomaka proizvoljne točke štapa o položaju te točke tj. koordinati x sada bi izgledao ovako.

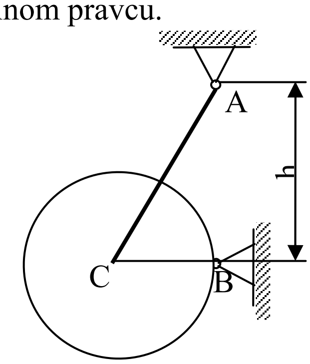


$$\Delta\ell_C = \frac{N \cdot x_C}{A \cdot E} \qquad \Delta\ell_B = \frac{N \cdot x_B}{A \cdot E}\,,\; x_B = \ell$$

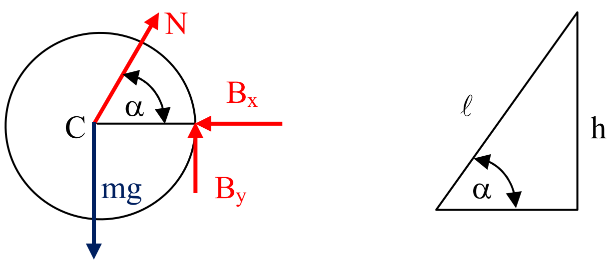
$$\Delta\ell_B \neq \Delta\ell_C\,!!!$$

Uočite sami razlike između prikazanih situacija!

Zadatak 2. Štap AC duljine ℓ u neopterećenom stanju, površine poprečnog presjeka A i zanemarive mase pričvršćen je u središtu valjka mase m i promjera D. Koliko iznosi naprezanje σ u štapu? Kolika je deformacija štapa ε? Uz sva rješenja navedite i predznake! Zadano je: m=15kg, h=400mm, ℓ=650mm, A=20mm^2, E=210000MPa. Napomena: točke A i B nalaze se na istom vertikalnom pravcu.



Štap AC pridržava valjak da ne padne i vlačno je opterećen. Oslobodimo tijla veza da bismo izračunali iznos sile u štapu!



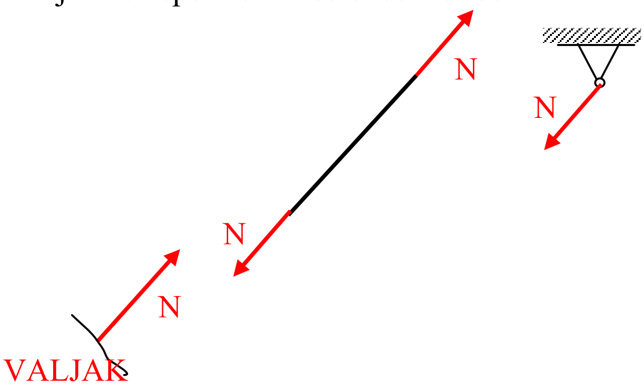
Iz pravokutnog trokuta izračunat ćemo kut α:

$$\sin\alpha = \frac{h}{\ell} \Rightarrow \alpha = 37,97°$$

$$\sum M_B = 0 \qquad N\cdot\frac{D}{2}\cdot\sin\alpha - m\cdot g\cdot\frac{D}{2} = 0$$

Odavde je N=239,N.

Sila N kako je nacrtana je sila koja zadržava valjak u ravnoteži i opterećuje ga vlačno. Evo opterećenog štapa ako nije jasno zašto je to tako. Oslobađamo cijeli štap veza i sa središtem valjka i s nepomičnim osloncem u točki A!



Izračunajmo sada tražene veličine.
Naprezanje je

$$\sigma = \frac{N}{A} = 11,95MPa.$$

Naprezanje je pozitivno je što se vidi iz komentara u prethodnom zadatku.
Deformaciju ε računamo iz izraza (Hookeov zakon).

$$\sigma = E\cdot\varepsilon$$

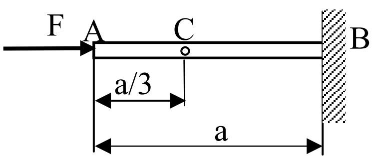
Odavde je $\varepsilon = 5,69\cdot10^{-5}$.

Deformacija je također pozitivna jer se štap produljuje. Deformacija se pojavljuje tamo gdje je $N \neq 0$.
Iz definicijskog izraza za deformaciju možemo izračunati produljenje štapa.

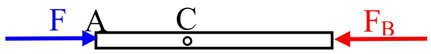
$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell}$$

pa je $\Delta\ell = 0,03699mm$

Zadatak 3. U štapu AB duljine na koji u točki A djeluje sila F izmjereno je naprezanje σ. Koliko iznose pomaci točaka A i C? Koliki bi bili pomaci istih točaka ako bi se sila F pomaknula u točku C Zadano je: E=210000MPa, a=299mm, σ=-57Mpa.



Iz slike je vidljivo da sila F djeluje na cijeloj duljini štapa AB a kao posljedica njenog djelovanja u točki B pojavljuje se reaktivna sila koja je po iznosu i pravcu djelovanja jednaka, a po orijentaciji suprotna sili F što je lako dokazati primjenom znanja stečenih u poglavlju „Oslobađanje tijela veza.“ Grafički predočeno to izgleda ovako:



U ovom tipu zadataka u pravilu ne moramo računati iznos reaktivne sile iako prethodnu činjenicu treba uvijek imati na umu. Aktivna sila F i reaktivna sila u točki B su vanjske sile koje uzrokuju pojavu unutarnje sile N=-F i naprezanja σ<0 zato jer obje sile djeluju tako da stlačuju štap od. žele ga skratiti (u tom slučaju predznak unutarnje sile N je negativan).
Pomak bilo koje točke računat ćemo uvijek u odnosu na čvrstu točku (nepomični oslonac ili uklještenje kao u ovom primjeru). Pomake točaka A i C izračunat ćemo prema izrazima:

$$\Delta\ell_A = \frac{N\cdot a}{A\cdot E} \quad ; \qquad \Delta\ell_C = \frac{N\cdot\frac{2}{3}\cdot a}{A\cdot E}$$

U gornjem izrazu nepoznanice su unutarnja sila N i površina poprečnog presjeka A koje međusobno podijeljene daju naprezanje tj.:

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

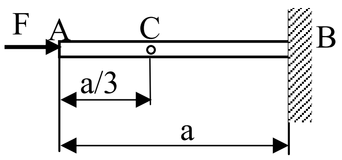
što supstitucijom u gornje izraze daje vrijednosti pomaka točaka A i C:

$$\Delta\ell_A = -0{,}0816mm\,; \quad \Delta\ell_C = -0{,}0541mm\,.$$

Predznak pomaka je negativan jer je σ<0 zbog N<0 što znači da je nastupilo skraćenje štapa odn. točke A i C su se približile točki B.
Pomakne li se sila F u točku C štap između točaka A i C sada postaje neopterećen tj. unutarnja sila između točaka A i C postaje jednaka nuli ($N_{A\text{-}C}$=0) dok se između točaka C i B ništa ne mijenja jer je unutarnja sila F između tih točaka i dalje jednaka sili F ($N_{C\text{-}B}$=-F). To ima za posljedicu da su sada pomaci točaka A i C jednaki jer će se sve točke koje se nalaze lijevo od točke C pomaknuti za isti iznos koliko se pomakne i točka C obzirom na činjenicu da je na tom dijelu unutarnja sila jednaka nuli. Prema tome, iznos pomaka je.

$$\Delta\ell_C = \frac{N\cdot\frac{2}{3}\cdot a}{A\cdot E} = \Delta\ell_A = -0{,}0541mm\,.$$

Zadatak 4. Štap AB u opterećenom stanju (silom F) ima duljinu a, a deformacija iznosi ε. Koliki je pomak točke C? Do kojeg iznosa se smije povećati sila F da se u štapu ne bi prekoračilo dopušteno naprezanje uz ostale uvjete nepromijenjene? Zadano je: ε=-0,0003; F=4500N, E=210000MPa, σ_{DOP}=-95MPa, a=399,20mm.



Iz zadane vrijednosti deformacije ε možemo izračunati duljinu neopterećenog štapa a': Zadana je duljina a opterećenog tj. deformiranog štapa!

$$\varepsilon = \frac{\Delta a}{a'} = \frac{a'-a}{a'} = -0{,}0003 \quad \Rightarrow \quad a' = \frac{a}{1-\varepsilon} = 399{,}32mm\,,$$

skraćenje štapa iznosi $\Delta a = a' - a = -0{,}12mm$.

Skraćenje štapa nastupilo je zbog djelovanja vanjske sile F i može se izraziti kao:

$$\Delta a = \frac{N \cdot a'}{A \cdot E}$$

Komentar: skraćenje štapa ima negativnu vrijednost jer je $N = -F$.
Iz ovog izraza možemo izračunati površinu A čija nam je vrijednost potrebna za računanje pomaka točke C:

$$A = \frac{N \cdot a'}{\Delta a \cdot E} = \frac{-F \cdot a'}{\Delta a \cdot E} = 71{,}3mm^2$$

Pomak točke C je :

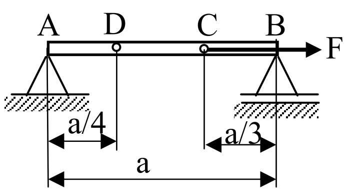
$$\Delta \ell_C = \frac{N \cdot \frac{2}{3} a'}{A \cdot E} = -0{,}08mm$$

Iznos sile F' izračunat ćemo iz uvjeta dopuštenog naprezanja uz $N = F'$:

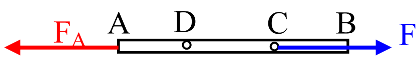
$$\sigma = \frac{N}{A} \le \sigma_{DOP} \qquad \Rightarrow \qquad F' = \sigma_{DOP} \cdot A = 6773{,}5N$$

Sila se smije povećati do tog iznosa da bi još bio zadovoljen uvjet dopuštenog naprezanja.

Zadatak 5. Štap AB, okruglog poprečnog presjeka polumjera r i duljine a, opterećen je silom F u točki C. Koliki je pomak točke C ako je poznat pomak Δl_D točke D? Koliki bi bili pomaci točaka C i B ako bi se sila F premjestila u točku D? Zadano je: Δl_D=0,0011mm, r=20mm, E=210000MPa, a=800mm.



Komentar: sila djeluje u točki C, a kao posljedica toga u nepomičnom osloncu pojavit će se reaktivna sila kako je prikazano sljedećom slikom:



Iako nam ova slika nije nužno potrebna za rješavanje zadatka, kao što je već rečeno u 1. zadatku, ipak na njoj možemo uočiti neke važne činjenice, a to je da će se pomaci točaka događati u odnosu na čvrstu točku (nepomični oslonac u točki A) i točku C u kojoj se nalazi hvatište sile F. Također, naprezanje između točaka A i C različito je od nule jer tu postoji unutarnja sila N ($\sigma_{A\text{-}C}>0 \Leftrightarrow N=F$) dok je između točaka C i B naprezanje jednak nuli jer je unutarnja sila jednaka nuli ($\sigma_{C\text{-}B}=0 \Leftrightarrow N=0$).

Pomak točke D je:

$$\Delta \ell_D = \frac{F \cdot \frac{a}{4}}{A \cdot E} = \frac{F \cdot a}{4 \cdot r^2 \cdot \pi} = 0{,}0011mm \qquad \text{uz } A = r^2 \cdot \pi$$

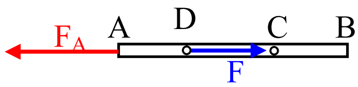
Iz ovog izraza možemo izračunati sili F:

$$F = \frac{\Delta\ell_D \cdot 4 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot E}{a} = 1451,4N$$

Dalje možemo izračunati pomak točke C, uvijek pazeći da uzmemo udaljenost točke čiji pomak računamo od nepomične točke (točka A):

$$\Delta\ell_C = \frac{F \cdot \frac{2}{3} \cdot a}{r^2 \cdot \pi \cdot E} = 0,00293mm$$

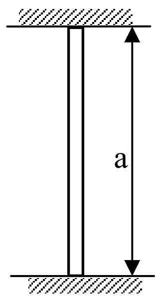
U nastavku zadatka treba silu F premjestiti u točku D kako slijedi:



Pomaci točaka B i C jednaki su pomaku točke D jer je sada unutarnja sila u svim presjecima desno od točke D jednaka nuli pa je:

$$\Delta\ell_B = \Delta\ell_C = \Delta\ell_D = \frac{F \cdot \frac{a}{4}}{A \cdot E} = 0,0011mm$$

Zadatak 6. Štap duljine ℓ i promjera d ugrađen je između dva zida međusobno udaljena za a. Koliko iznosi početno naprezanje u štapu (uključujući i predznak)? Za koliko treba ugrijati ili ohladiti štap (navesti) da bi naprezanje u štapu iznosilo 0 (nula), a koliko da bi se postiglo zadano naprezanje σ (u oba slučaja u odnosu na početnu temperaturu)? Zadano je: ℓ=750,2mm, a=750mm, d=25mm, E=85000MPa, $\alpha=11\cdot10^{-6}$m/mK, σ=90MPa.



Ovdje se pojavljuju dva nova pojma, početno naprezanje i zagrijavanje ili hlađenje štapa.
Početno naprezanje je naprezanje koje je nastupilo u štapu prilikom njegove ugradnje. Ono može biti vlačno ili tlačno. Jednostavnije rečeno, početno naprezanje u štapu će se pojaviti ako je on u odnosu na udaljenost (razmak) dvije točke (oslonca) između kojih se želi ugraditi predugačak ili prekratak. Da bi se štap čija duljina ne odgovara udaljenosti dviju točaka mogao ugraditi potrebno ga je na silu skratiti ili produljiti što za posljedicu ima nastanak uzdužne sile i naprezanja.
Kako ćemo znati je li štap predugačak ili prekratak? Tako što ćemo pažljivo pročitati tekst zadatka gdje u konkretnom slučaju možemo uočiti da je štap dugačak ℓ=750,2mm, a razmak točaka (dva zida) iznosi a=750mm. To znači da je štap predugačak za 0,2mm što predstavlja razliku ℓ-a.
Stoga štap treba djelovanjem tlačne aksijalne sile skratiti za tih 0,2mm. Iz toga proizlazi deformacija ε štapa i početno naprezanje σ_0. Izračunajmo ove veličine.

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{-0,2}{750,2} = -0,00027$$

Uočimo da je deformacija negativna jer je došlo do skraćenja štapa što je prema defaniciji (materijali od prošlog puta) također negativno.

$$\sigma_0 = E \cdot \varepsilon = 85000 \cdot \left(-0,00027\right) = -22,67MPa$$

Slijedom toga i izračunato početno naprezanje je negativnog predznaka tj. radi se o tlačnom naprezanju.
Nakon što je sada štap ugrađen između dvije čvrste točke uz pojavu početnog naprezanja pogledajmo što se dalje traži u zadatku. Grijanjem ili hlađenjem štapa treba postići naprezanje nula tj. poništiti početno naprezanje, a u drugom slučaju postići zadano naprezanje σ.
Što će se dogoditi grijemo li štap, a što hladimo li štap.
Podsjetimo se dvije osnovne činjenice, grijanje štapa ili nekog drugog tijela koje nije učvršćeno, npr. naš štap prije ugradnje, taj štap ili tijelo slobodno će se produljivati ili širiti. Dokle god nema prepreke tom širenju u tom štapu ili tijelu neće se pojaviti naprezanje. Isto posljedice (nema naprezanja) dogodile bi se i hlađnjem štapa ili tijela s time da bi dolazilo do skraćenja ili smanjenja štapa odn. tijela. Također možemo konstatirati da će svaki štap ili tijelo na različitim temperaturama imati različite duljine odn. dimenzije.
Vratimo se na naš štap koji je ugrađen uz početno tlačno naprezanje.
Slijedom prethodno navedenog grijanjem našeg štapa on bi se htio dodatno produljiti što mu čvrste točke ne dopuštaju. Što bi ga više grijali, štap bi htio biti to dulji, a čvrste točke ga drže stalno na istoj udaljenosti a (razmak zidova). Konstatiramo da se štap koji želi biti sve dulji, zadržava stalno na istoj duljini što stvarno znači da zapravo biva skraćen. Ovo je ključni trenutak za razumijevanje problema. Štap koji se grije se skraćuje, zvuči nelogično! Razlog je jednostavan, isključivo jer mi nije dopušteno da se produljuje! Kolokvijalno rečeno, grijanjem se štap sve više i više upire između zidova i tako se u njemu sve više povećava tlačno naprezanje negativno naprezanje. U zadatku se traži da prvo postignemo naprezanje 0, a potom naprezanje 90MPa (pozitivno tj. vlačno). Logično možemo zaključiti, ako nas grijanje štapa vodi u sve veće negativne iznose naprezanja, štap očito moramo početi hladiti kako bi krenuli prema nuli odn. pozitivnim iznosima naprezanja.
Razmišljamo prethodnom logikom, samo sa suprotnim predznakom. Više hladimo, štap se želi sve više skratiti, a to mu nije dopušteno zbog konstantnog razmaka točaka između kojih je pričvršćen.
Riješimo sada zadatak.
Da bi naprezan bilo jednako nuli (σ=0) štap treba, kako je prethodno objašnjeno ohladiti za Δt_0 koji ćemo izračunati tako što ćemo napisati izraz za skraćenje štapa $\Delta\ell$ koje je nastupilo njegovom ugradnjom :

$$\left|\Delta\ell\right| = \alpha \cdot \ell \cdot \left|\Delta t_0\right|$$

odavde je:

$$\left|\Delta t_0\right| = \frac{\left|\Delta\ell\right|}{\alpha \cdot \ell} = 24,2°C$$

<u>Štap treba ohladiti za ovu temperaturu da bi se postiglo stanje bez naprezanja tj. da bude σ=0.</u>
Veličine Δt_0 i $\Delta\ell$. nalaze se u znakovima apsolutnih vrijednosti da nas ne bunjuju predznaci, ali cijelo vrijeme nam mora biti jasno što se događa.
Da bi postigli naprezanje σ=90MPa štap treba <u>dodatno ohladiti</u> za koji ćemo izračunati preko produljenja štapa $\Delta\ell'$ koje izaziva zadano naprezanje:

$$\left|\Delta\ell'\right| = \frac{N\cdot\ell}{A\cdot E}$$

a to ćemo postići hlađenjem štapa za Δt

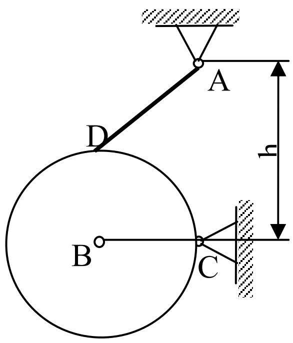
$$\left|\Delta\ell'\right| = \alpha\cdot\ell\cdot\left|\Delta t\right|$$

Izjednačavanjem ova dva izraza uz $\sigma = \frac{N}{A}$ dobivamo:

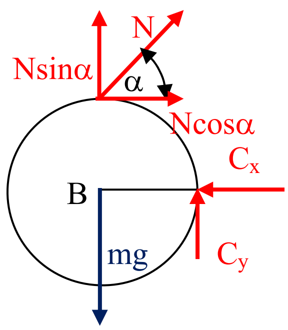
$$\Delta t = \frac{\sigma}{\alpha\cdot\ell} = 96{,}3°C$$

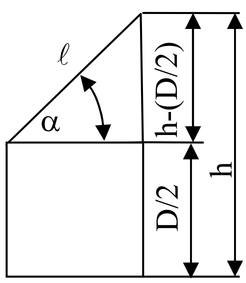
Da bi se od početnog naprezanja σ_0=-22,67MPa postiglo naprezanje σ=90MPa štap je potrebno ohladiti za ukupno 24,2°C+96,3°C=120,5°C.

Zadatak 7. Štap AD duljine ℓ u neopterećenom stanju, površine poprečnog presjeka A i zanemarive mase pričvršćen je u točki D na vrhu valjka mase m i promjera D. Koliko iznosi naprezanje σ u štapu? Kolika je deformacija štapa ε? Uz sva rješenja navedite i predznake! Koliko bi se štap dodatno produljio ili skratio (navedite riječima) ako se ugrije za 25°C? Kolika je konačna duljina opterećenog štapa nakon zagrijavanja? Koliko bi bilo naprezanje u istom štapu ako bi se točka C premjestila u točku dijametralno suprotnu točki D? Zadano je: m=15kg, h=400mm, D=260mm, A=20mm^2, α=11·10^{-6}m/mK, E=210000MPa. Napomena: točke A i C i točke B i D nalaze se na dva paralelna vertikalna pravca.



Oslobodimo tijelo veza da bi izračunali silu u štapu.





Iz desne slike možemo izračunati kut α i duljinu štapa ℓ:

$$tg\alpha = \frac{h-\frac{D}{2}}{\frac{D}{2}} \quad \Rightarrow \alpha=64{,}3° \text{ i}$$

$$\ell = \sqrt{\left(h - \frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2} = 299,7mm$$

Uvjet ranoteže je:

$$\sum M_C = 0 \qquad m \cdot g \cdot \frac{D}{2} - N \cdot \sin\alpha \cdot \frac{D}{2} - N \cdot \cos\alpha \cdot \frac{D}{2} = 0$$

odavde je N=108,7N.
Deformacija je.

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{N}{A \cdot E} = \frac{\sigma}{E} = 0,00002586 .$$

Nadalje je početno naprezanje:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E = 5,43MPa .$$

Štap je vlačno opterećen, deformaija i naprezanje su pozitivni.

Pogledajmo sada odovojeno što će se dogoditi s aštapom ako ga zagrijemo za zadanu temperaturu.

Grijanjem za zadani Δt štap će se produljiti za:

$$\Delta\ell_t = \alpha \cdot \ell \cdot \Delta t = 0,0824mm .$$

Promjena temperature je veća od nule pa se štap mogao slobodno produljiti (za razluku od prethodnog zadatka.

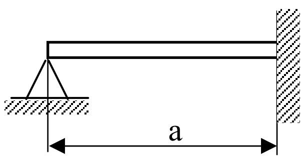
Duljina štapa uslijed početne deformacije i grijanja jednaka je:

$$\ell + \Delta\ell + \Delta\ell_t = 299,7 + 0,0077495 + 0,0824 = 299,76mm .$$

Ohladili se štap na početnu temperaturu skratit će se za isti iznos za koliko se produljio uslijed grijanja ($\Delta\ell_t$).

Premjesti li se točka C nasuprot točke D sila u štapu bit će jednaka nuli (N=0) što ćete jednostavno dokazati postavljenjem sume momenata oko novo postavljene točke C.

Zadatak 8. Štap AB, okruglog poprečnog presjeka polumjera r duljine 700,15mm, treba ugraditi između nepomičnog oslonca i čvrstog zida između kojih je razmak a? Koliko će uslijed toga nastupiti početno naprezanje (uključujući i predznak)? Za koliko se treba zagrijati/ohladiti štap da bi on ispao iz ležišta, a za koliko da bi se udvostručilo početno naprezanje? Zadano je:r=15mm, E=210000MPa, a=700mm, $\alpha = 11 \cdot 10^{-6}$m/mK.



Komentar: oslobađanjem tijela veza pokazalo bi se da je ovo statički neodređeni zadatak tj. da ima više nepoznanica nego što se može postaviti uvjeta ravnoteže. Bez obzira na tu činjenicu, zadatak se može riješiti jer se vrijednosti nepoznatih veličina vezane uz pojave u unutarnjem presjeku štapa mogu izračunati.

Duljina štapa u neopterećenom stanju iznosi 700,15mm što je za 0,15mm dulje nego što je razmak između nepomičnog oslonca i zida. Da bi se štap mogao ugraditi između te dvije točke potrebno ga je skratiti nekom uzdužnom sila. U tako „na silu“ ugrađenom štapu pojavit će se tlačna unutarnja sila (N<0) i tlačno naprezanje (σ<0). Takvo naprezanje nazivamo početno ili montažno naprezanje i ono je stalno prisutno u štapu.
Deformacija štapa je:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{a} = \frac{-0,15}{700} = -0,000214$$

Početno naprezanje koje je zbog nastupilo u štapu je:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = -45MPa$$

Da bi štap ispao iz ležišta treba postići da u njemu nestane uzdužne sile N jer se tada štap više ne upire u zid. To znači da štap treba hlađenjem skratiti upravo za iznos koliko je bio predugačak tj. za 0,15mm a to ćemo izračunati koristeći izraz:

$$\Delta\ell = \alpha \cdot a \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\ell}{\alpha \cdot a} = -19,5°C \qquad (\Delta\ell < 0)$$

Da bi se udvostručilo početno naprezanje (σ=-45MPa) štap treba grijati jer će se grijanjem on htjeti produljiti ali mu zbog čvrstih oslonaca to nije dopušteno. To znači da će se on o zid upirati sve većom i većom unutarnjom silom N. U jednom trenutku ta će sila prouzročiti nastanak traženog naprezanja σ_t=-90MPa. Da je štapu bilo omogućeno nesmetano produljenje uslijed grijanja za traženi Δt on bi se produljio za 0,15mm. Kako mu to nije bilo omogućeno on je u stvari ostao skraćen za tih 0,15mm bez obzira što je zagrijavan!
Slijedi:

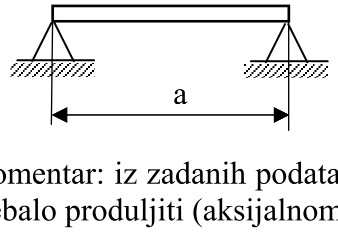
$$|\Delta\ell| = \frac{N \cdot a}{A \cdot E} = |\sigma_t| \cdot \frac{a}{E} \quad \text{i} \qquad |\Delta\ell| = \alpha \cdot a \cdot |\Delta t|$$

Izjednačavanjem prethodnih izraza dobije se temperatura Δt za koju je potrebno ugrijati štap da bi se udvostručilo početno naprezanje:

$$|\Delta t| = \frac{|\sigma_t|}{\alpha \cdot E} = 19,5°C$$

Napomena: u prethodnim izrazima korišteni su znakovi apsolutnih vrijednosti kod nekih veličina kao bi se isključile nejasnoće koje bi eventualno mogle nastupiti zbog činjenice da štap grijemo (Δt>0) a da se on zapravo skraćuje $\Delta\ell < 0$ zato jer mu čvrsto uležištenje ne dopušta produljenje.

Zadatak 9. Štap AB, okruglog poprečnog presjeka polumjera r, duljine ℓ, ugrađen je između dva nepomična oslonca čiji je razmak a. Koliko je uslijed toga nastupilo početno naprezanje (uključujući i predznak)? Za koliko se treba zagrijati/ohladiti štap da bi više ne bi bilo naprezanja, a za koliko da bi se pojavilo dopušteno naprezanje? Zadano je: r=15mm, ℓ=700mm, a=700,2mm, E=210000MPa, σ_{DOP}=110MPa α=11·10^{-6}m/mK.



Komentar: iz zadanih podataka vidljivo je da je štap bio prekratak pa ga je prilikom ugradnje trebalo produljiti (aksijalnom silom) zbog čega se u štapu pojavilo početno vlačno naprezanje.

Produljenje štapa iznosi:

$$\Delta\ell = 700,2 - 700 = 0,2mm$$

Iz izraza za produljenje može se izračunati iznos početnog vlačnog naprezanja:

$$\Delta\ell = \frac{N \cdot \ell}{A \cdot E} = \sigma_0 \cdot \frac{\ell}{E} \quad \Rightarrow \; \sigma_0 = \frac{\Delta\ell}{\ell} \cdot E = 60MPa$$

Da bi nestalo početnog vlačnog naprezanja štap je potrebno zagrijati kako bi se on produljio i time poništio početno naprezanje ili možemo razmišljati i ovako: da smo štap prije ugradnje zagrijali za Δt koji bi dao produljenje od $\Delta\ell$=0,2mm mogli smo ugraditi bez početnog naprezanja. Također, valja napomenuti da bi se taj iznos naprezanja pojavio nakon što smo ugradili zagrijani štap i pustili ga da se ohladi na početnu temperaturu.

Da bi štap produljili za $\Delta\ell$=0,2mm potrebno ga je zagrijati za Δt što možemo izračunati prema:

$$\Delta\ell = \alpha \cdot \ell \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \qquad \Delta t = \frac{\Delta\ell}{\alpha \cdot \ell} = 25,97°C$$

Ugrijemo li štap za ovaj iznos poništit će se početno naprezanje. Sada je naprezanje u štapu jednako nuli (σ=0).

U nastavku potrebno je izračunati za koliko treba zagrijati ili ohladiti štap da bi u njemu dopušteno (vlačno) naprezanje. Obzirom da u štapu već postoji početno (montažno) naprezanje pozitivnog predznaka potrebno je znati koji dodatni iznos naprezanja treba grijanjem ili hlađenjem štapa:

$$\Delta\sigma = \sigma_{DOP} - \sigma_0 = 110 - 60 = 50MPa$$

Taj iznos postići će se hlađenjem štapa za neki Δt. Hlađenjem se štap želi skratiti ali mu to čvrsto uležištenje ne dopušta pa se zapravo produljuje za iznos $\Delta\ell_{DOP}$ što uzrokuje porast toplinskog naprezanja sve do iznosa dopuštenog naprezanja σ_{DOP}. Može se pisati:

$$\Delta\ell_{DOP} = \frac{N \cdot \ell}{A \cdot E} = \Delta\sigma \cdot \frac{\ell}{E}$$

Također vrijedi:

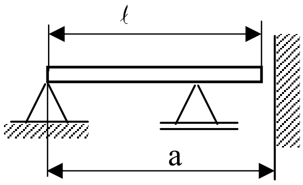
$$\Delta\ell_{DOP} = \alpha \cdot \ell \cdot \Delta t$$

Izjednačavanjem ova dva izraza dobiva se:

$$\Delta t = \frac{\Delta\sigma}{E \cdot \alpha} = 21,6°C$$

Komentar: hlađenjem štapa u kojem već postoji početno vlačno naprezanje od 60MPa za 21,6°C u štapu će pojaviti dodatno vlačno naprezanje $\Delta\sigma$=50MPa čime se postiže iznos dopuštenog naprezanja σ_{DOP}. Praktično gledano, unošenjem početnog naprezanja smanjili smo radno područje štapa jer će iznos dopuštenog naprezanja postići prije nego da nema početnog naprezanja ili da je ono negativnog predznaka. Pravilan odabir predznaka početnog naprezanja može omogućiti širi raspon toplinskog opterećenja štapa što je posebno važno za konstrukcije koje su u svojim eksploatacijskim uvjetima podložne većoj promjeni radne temperature.

Zadatak 10. Štap AB, okruglog poprečnog presjeka polumjera r, duljine ℓ grije se za Δt. Koliko će uslijed toga nastupiti naprezanje (uključujući i predznak)? Zadano je: r=15mm, E=210000MPa, Δt =45°C, ℓ=699,80mm a=700mm, $\alpha=11\cdot10^{-6}$m/mK.



Komentar: iz slike je vidljivo da je duljina štapa ℓ manja od udaljenosti a između čvrstog oslonca i zida. Grijanjem se štap počinje produljivati i dokle god mu je to moguće činiti slobodno, bez prepreke u njemu se neće pojaviti naprezanje. U trenutku kad štap dodirne zid, a zagrijavanje se nastavi, štap će se htjeti i dalje produljivati ali mu to više nije moguće pa se on počinje sve više upirati o zid (skraćuje se) i u njemu se pojavljuje tlačno naprezanje. Prvo je potrebno ispitati hoće li se uopće za zadani Δt štap dovoljno produljiti i dotaknuti zid.

Zračnost između štapa i zida iznosi:

$$\Delta a = a - \ell = 0,2mm$$

Da bi se štap produljio za taj iznos potrebno ga je zagrijati za neki Δt_1 koji ćemo izračunati iz izraza:

$$\Delta a = \alpha \cdot \ell \cdot \Delta t_1 \;\Rightarrow\; \Delta t_1 = \frac{\Delta a}{\alpha \cdot \ell} = 25,98°C$$

Zagrije li se štap za taj iznos on će se produljiti dovoljno tek da dotakne zid i u tom trenutku se u njemu još neće pojaviti naprezanje. Vidimo da je zadani Δt veći od izračunatog Δt_1 pa se može zaključiti da će štap daljnjim zagrijavanjem htjeti dodatno produljiti ali mu zid to ne dopušta pa će se u njemu pojavit tlačno naprezanje.
Razlika temperatura za koju još treba zagrijati štap iznosi:

$$\Delta t_\sigma = 45°C - 25,98°C = 19,01°C$$

Zagrijavanje štapa za taj iznos prouzročilo bi produljenje:

$$\Delta a_\sigma = \alpha \cdot \ell \cdot \Delta t_\sigma$$

Obzirom da zid štapu ne dopušta da se slobodno produlji za taj iznos, štap će se zapravo skratiti i prouzročiti pojavu tlačnog naprezanja. Vrijedi izraz:

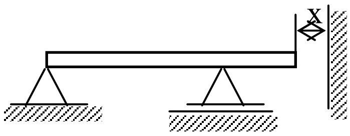
$$\Delta a_\sigma = \frac{N \cdot \ell}{A \cdot E}$$

Izjednačavanjem ova dva izraza dobiva se naprezanje koje će nastupiti zbog zagrijavanja štap za zadani Δt:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \alpha \cdot \Delta t_\sigma \cdot E = -43,9MPa$$

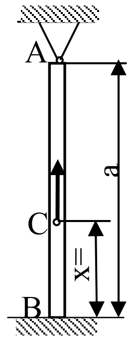
3.2. Primjeri za samostalno rješavanje

1. Štap duljine ℓ i promjera d udaljen je za udaljenost x od čvrstog zida. Koliko je početno naprezanje u štapu? Koliko će biti naprezanje (uključujući i predznak) u štapu ako se on zagrije za Δt? Trenje u pomičnom osloncu zanemarite! Zadano je: ℓ=750mm, x=0,3mm, Δt=75°, d=25mm, E=85000MPa, $\alpha=11\cdot10^{-6}$m/mK.



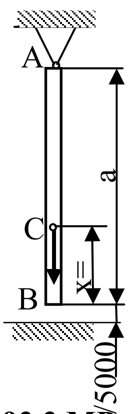
Rješenje: σ_0=0MPa, σ= - 36,1 MPa.

2. Vertikalni štap zanemarive mase, duljine a i površine poprečnog presjeka A obješen je o plafon, i u točki B dodiruje podlogu bez početnog naprezanja. Nakon toga u točki C na njega počinje djelovati sila F. Odredite udaljenost x točke C (hvatište sile F) od točke B da bi pojavila zračnost između kraja štapa i podloge u iznosu a/5000. Vlada li u cijelom štapu jednak iznos naprezanja, potkrijepite računom (uključujući i predznake)? Zadano je: F=2800N, a=700mm, A=30mm^2, E=85000MPa.



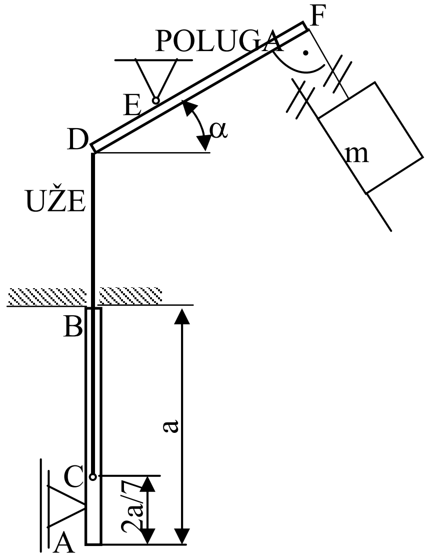
Rješenje: x=572,5 mm, $\sigma_{A\text{-}C}$= - 93,3 MPa, $\sigma_{C\text{-}B}$=0 MPa.

3. Vertikalni štap $\overline{AB}$ zanemarive mase, duljine a i površine poprečnog presjeka A obješen je o plafon, a u točki C na njega djeluje sila F . Odredite udaljenost x točke C (hvatište sile F) od točke B da bi ta točka dotaknula podlogu! Vlada li u cijelom štapu jednak iznos naprezanja, potkrijepite računom (uključujući i predznake)? Zadano je: F=2800N, a=700mm, A=30mm^2, E=85000MPa.



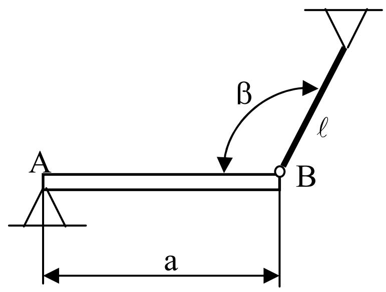
Rješenje: x=572,5 mm, $\sigma_{A\text{-}C}$=93,3 MPa, $\sigma_{C\text{-}B}$=0 MPa.

4. Vertikalni štap $\overline{AB}$ zanemarive mase, duljine a i površine poprečnog presjeka A upire se u točki B o podlogu, a u točki C štap je posredstvom užeta pričvršćen za polugu zanemarive mase. Na drugi kraj poluge u točki F pod pravim kutom obješen je uteg mase m koji se bez trenja oslanja na podlogu. Odredite omjer duljina (izraženo decimalnim brojem) $|DE|:|EF|$ poluge ako je poznat pomak točke A $\Delta\ell_A$ (u odnosu na neopterećeno stanje štapa). Vlada li u cijelom štapu jednak iznos naprezanja, potkrijepite računom (uključujući i predznake)? Zadano je: m=75,2kg, a=700mm, A=90mm^2, $\Delta\ell_A$= - 0,11mm, E=85000MPa.



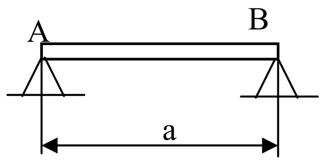
Rješenje: |DE|:|EF|=0,438, $\sigma_{B\text{-}C}$=18,7 MPa, $\sigma_{A\text{-}C}$=0.

5. Greda AB duljine a i mase m u točki B pridržava se štapom duljine ℓ u neopterećenom stanju, zanemarive mase i površine poprečnog presjeka A. Koliko je naprezanje u štapu (uključujući i predznak) i koliko je produljenje/skraćenje štapa (navedite)? Za koliko bi se štap produljio/skratio (navedite) ako se ohladi za Δt? Koliko bi tada bilo naprezanje u štapu? Zadano je: ℓ=450mm, m=300kg, A=100mm^2, β=125°, Δt=25°C, E=210000MPa, $\alpha=11\cdot10^{-6}$m/mK.



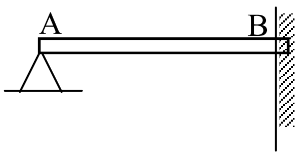
Rješenje: σ=17,96 MPa, $\Delta\ell$=0,038 mm, $|\Delta\ell_t|$=0,124 mm (skraćenje uslijed hlađenja).

6. Štap AB čvrsto je uležišten između dva oslonca. Koliko je početno naprezanje σ_0 (uključujući i predznak) u štapu ako je njegova duljina prije ugradnje a'? Za koliko se smije ugrijati/ohladiti (navesti) štap da se ne bi prekoračio uvjet dopuštenog naprezanja? Zadano je: a'=699,85mm, a=0,7m, σ_{DOP}=105MPa, E=210000MPa, $\alpha=11\cdot10^{-6}$m/mK.



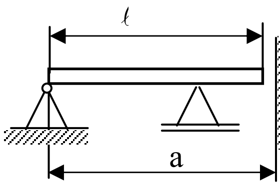
Rješenje: σ_0=45,0MPa, Δt=25,97°C (hladiti).

7. U čvrsto uležištenom štapu AB nakon ugradnje i zagrijavanja za Δt izmjereno je naprezanje σ. Da li je nakon ugradnje, a prije zagrijavanja u štapu postojalo početno naprezanje (σ_0)? Koliko i kojeg predznaka? Zadano je: σ=22MPa, Δt=47°C, E=105000MPa, $\alpha=11\cdot10^{-6}$m/mK.



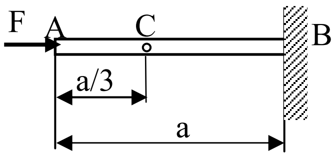
Rješenje: Da, σ_0=76,3MPa.

8. Štap AB, okruglog poprečnog presjeka polumjera r, duljine ℓ grije se za Δt? Koliko će uslijed toga nastupiti naprezanje (uključujući i predznak)? Zadano je: r=15mm, E=210000MPa, Δt =45°C, ℓ=699,80mm a=700mm, $\alpha=11\cdot10^{-6}$m/mK.



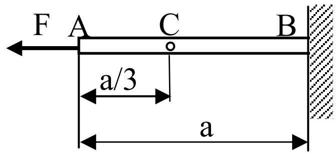
Rješenje: σ=-43,9MPa (tlak).

9. Štap AB u opterećenom stanju (silom F) ima duljinu a, a deformacija iznosi ε. Koliki je pomak točke C? Do kojeg iznosa se smije povećati sila F da se u štapu ne bi prekoračilo dopušteno naprezanje uz ostale uvjete nepromijenjene? Zadano je: ε=-0,0003; F=4500N, σ_{DOP}=-95MPa, E=210000MPa, a=399,20mm.



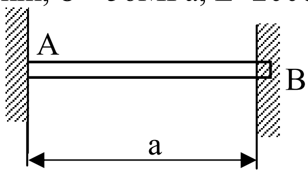
Rješenje: $\Delta\ell_C$=0,08mm, F'=6773,5N.

10. Štap AB u opterećenom stanju (silom F) ima duljinu a. Koliki je pomak točke C koja se nalazi na trećini duljine od točke A neopterećenog štapa? Do kojeg iznosa se smije povećati sila F da se u štapu ne bi prekoračilo dopušteno naprezanje uz ostale uvjete nepromijenjene? Zadano je: F=4500N, σ_{DOP}=-95MPa, E=210000MPa, A=100mm^2, a=400,20mm.

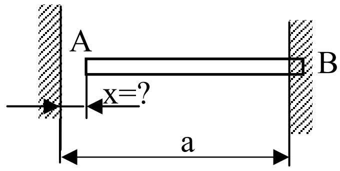


Rješenje: a_0=400,14mm, F'=9500N.

11. U štapu AB zagrijanom na 75°C izmjereno je naprezanje σ (slika a.). Na koju temperaturu treba ohladiti štap da bi se između zida i štapa pojavila zračnost x (slika b.)? Zadano je: x=0.12mm, σ=-56MPa, E=200000Mpa, a=500mm, α=11·10^{-6}m/mK.



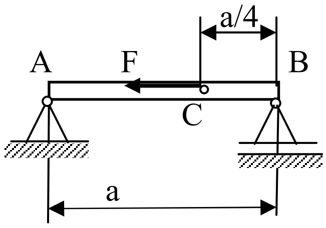
Slika 2a.



Slika 2b.

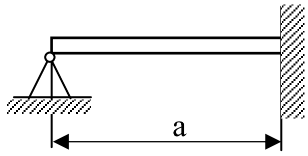
Rješenje:, t=27,7°C.

12. U štapu AB, na koji djeluje sila u točki C, izmjereno je naprezanje σ. Koliko se puta mora povećati sila da bi se doseglo dopušteno naprezanje? Koliki su u tom slučaju pomaci točaka A i B? Zadano je: σ=-35MPa, σ_{DOP}=-105MPa E=210000MPa, a=800mm.



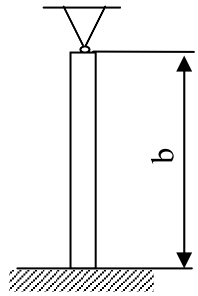
Rješenje: Sila se mora uvećati 3 puta, $\Delta\ell_B = \Delta\ell_C$=-0,3mm.

13. Štap AB okruglog poprečnog presjeka polumjera r čvrsto je uležišten. Za koliko je zagrijan štap ako je u njemu izmjerena uzdužna sila F? Za koliko se još smije zagrijati štap da se ne bi prekoračio uvjet dopuštenog naprezanja? Zadano je: F=-25000N, r=15mm, E=210000MPa, σ_{DOP}=110MPa, $\alpha=11\cdot10^{-6}$m/mK.



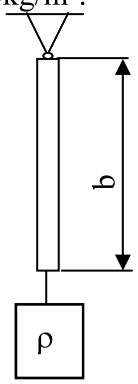
Rješenje: Δt=15,31°C, Δt_{DOP}=32,3°C.

14. Štap površine poprečnog presjeka A ugrađen je uz početnu deformaciju ε. Kolika će iznositi ukupna deformacija štapa ako se on zagrije za Δt? Koliko je početno naprezanje u štapu, a koliko nakon što se on zagrije (uključujući i predznake)? Masu štapa zanemarite! Zadano je: ε=-0,0005, A=50mm^2, E=210000MPa, $\alpha=11\cdot10^{-6}$m/mK, Δt=15°C.



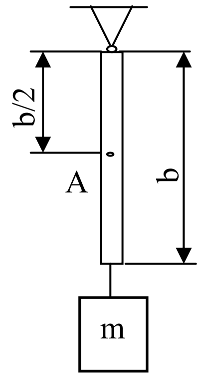
Rješenje: ε_{uk}=-0,000665, σ_0=-105MPa, σ_{uk}=-139,7MPa.

15. Na štap duljine b obješena je kocka duljine brida a i gustoće ρ. Koliko iznosi duljina brida kocke a, ako je izmjerena deformacija štapa ε? Masu štapa zanemarite! Koliko je naprezanje u štapu čija je površina poprečnog presjeka A? Zadano je: ε=0,0003, A=40mm^2, E=125000Mpa, ρ=8300kg/m^3.



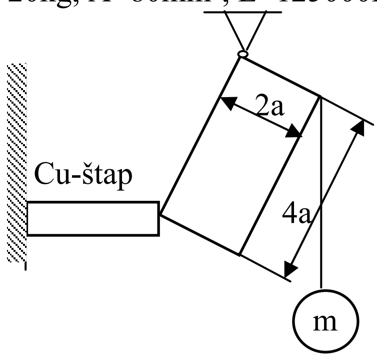
Rješenje: a=264mm, σ=37,5N/mm^2.

16. Odredite iznos mase m obješene na čelični štap duljine b ako je poznat pomak Δl_A točke A koja se nalazi na polovini duljine štapa? Koliko bi iznosilo produljenje štapa ako bi se masa m premjestila u točku A? Masu štapa zanemarite! Zadano je: $\Delta\ell_A = 0{,}003$mm, A=100mm^2, b=400mm, E=210000MPa.



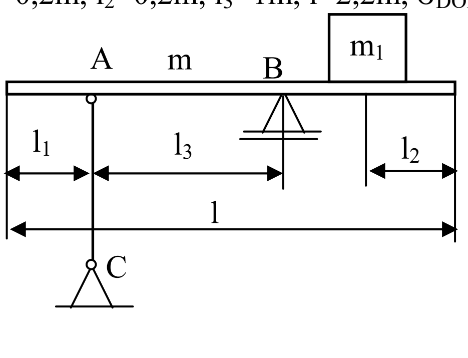
Rješenje: m=32,1kg, $\Delta\ell_Š = \Delta\ell_A$

17. Uteg mase m obješen je na blok zanemarive mase i pritišče bakreni štap površine poprečnog presjeka A, na vertikalni zid. Koliko iznosi deformacija bakrenog štapa i koliko je naprezanje u štapu (uključujući i predznake)? Masu bakrenog štapa i trenje zanemarite! Zadano je: m=20kg, A=80mm^2, E=125000MPa.



Rješenje: ε= - 9,81·10^{-6}, σ= - 1,23MPa

18. Dimenzionirajte štap AC okruglog poprečnog presjeka koji pridržava krutu gredu mase m, opterećenu utegom mase m_1. Štap AC je kružnog poprečnog presjeka. Zadano je:, m=20kg, m_1=340kg, l_1=0,2m, l_2=0,2m, l_3=1m, l=2,2m, σ_{DOP}=80MPa.

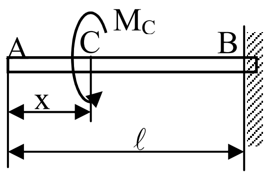


Rješenje: d=6,5mm

4. Uvijanje okruglih štapova

4.1. Riješeni primjeri

Zadatak 1. Štap AB, okruglog poprečnog presjeka, opterećen je u točki C momentom uvijanja M_C nepoznatog iznosa. Koliko iznosi duljina štapa ℓ ako je poznato naprezanje τ u štapu i zakret φ_C točke C? Koliki je tada zakret točke A (u stupnjevima i radijanima). Koliki bi bio zakret točke A ako bi se u tu točku dodao moment istog iznosa, ali suprotnog smjera, kao onaj u točki C? Zadano je:, φ_C =1,1°, x=340mm, τ=55MPa, d=22mm, G=80GPa



U rješavanju ovih zadataka možemo primijeniti analogno razmišljanje kao i kod aksijalno opterećenih štapova imajući stalno u vidu da se radi o dvije potpuno različite vrste opterećenja.
Pogledajmo o čemu se radi. Štap okruglog poprečnog presjeka, a izrazi koje ćemo koristiti vrijede isključivo za takve štapove i za druge oblike poprečnih presjeka se ne mogu koristiti, opterećen je momentom uvijanja. Moment uvijanja djeluje na štap tako da ga želi okrenuti oko uzdužne osi, uvija ga, kao kad na primjer odvrćemo ili zavrćem čep na boci ili to isto činimo s vijkom kojeg utežemo ili otpuštamo.
U točki B pojavljuje se reaktivni moment ali ga nećemo morati računati, iako to ne bi bio nikakav problem. Slično je bili i kod aksijalno opterećenih štapova. Sve što će se događati ovdje bit će u odnosu na tu čvrstu (nepomičnu točku).
Deformacije koje će se pojavljivati su isključivo kutne (u stupnjevima ili radijanima), a naprezanja tangencijalna tj. poprečna koja se označavaju grčkim slovom τ.
Riješimo zadatak.
Preračunavati stupnjeve u radijane smo već prije naučili pa je zakret točke C izražen u radijanima:

$$\varphi_C = 1{,}1° = 0{,}019198 rad$$

Iz izraza za naprezanja izračunat ćemo iznos momenta uvijanja M_C kako slijedi:

$$\tau = \frac{M_C}{w_P} = \frac{16 \cdot M_C}{d^3 \cdot \pi} \qquad \Rightarrow \qquad M_C = \frac{d^3 \cdot \pi \cdot \tau}{16} = 114990{,}1 Nmm$$

Veličina w_P u nazivniku naziva se polarni moment otpora i računa se iz polarnog statičkog momenta tromosti I_P. Potonja veličina predstavlja karakteristiku poprečnog presjeka (v. predavanja). U poglavlju aksijalno opterećenih štapova karakteristika poprečnog presjeka bila je površina tog istog presjeka (v. predavanja). Veza između ovih veličina je:

$$w_P = \frac{I_P}{r_{\max}} = \frac{\frac{d^4 \cdot \pi}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{d^3 \cdot \pi}{16}$$

gdje je $r_{\max} = \dfrac{d}{2}$ maksimalna udaljenost najdalje točke poprečnog presjeka (obod poprečnog presjeka) od središta poprečnog presjeka (kruga).

Uvrštavanjem veličine w_P u izraz za naprezanje daje iznos maksimalnog tangencijalnog naprezanja u tom presjeku.
Nakon što smo izračunali iznos momenta uvijanja M_C možemo postaviti izraz za zakret točke C. Ovdje razmišljamo slično kao u prethodnom poglavlju. Deformacija, ovdje je to kutna deformacija, će se pojavljivati u odnosu na čvrstu točku, ovdje je to točka B.

$$\varphi_C = \frac{M_C \cdot (\ell - x)}{G \cdot I_P} \quad \ell = x + \frac{\varphi_C \cdot G \cdot I_P}{M_C} = 647,2mm$$

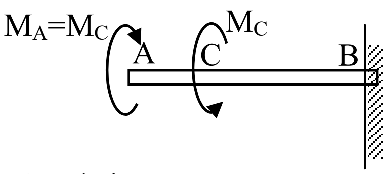
Uočimo da je zakret točke C rezultat djelovanja momenta uvijanja M_C između čvrste točke B i točke C u kojoj djeluje taj moment (slično kao što je to bilo sa pomakom točke kod aksijalno opterećenog štapa).
Vrijednost momenta tromosti je.

$$I_P = \frac{d^4 \cdot \pi}{32} = 22998,03mm^4$$

I naposljetku, duljina štapa je:

$$\ell = x + \frac{\varphi_C \cdot G \cdot I_P}{M_C} = 647,2mm$$

Dodajmo sada u točku A moment istog iznosa kao M_C ali suprotnog smjera (M_A=M_C) kako je prikazano slikom.



Zakret točke A tada je:

$$\varphi_A = \frac{M_A \cdot \ell}{G \cdot I_P} - \frac{M_C \cdot (\ell - x)}{G \cdot I_P} = \frac{M_C}{G \cdot I_P}\left(\ell - (\ell - x)\right) = \frac{M_C \cdot x}{G \cdot I_P} = 0,02125rad \mathrel{\hat{=}} 1,22° \qquad (M_A=M_C!!!)$$

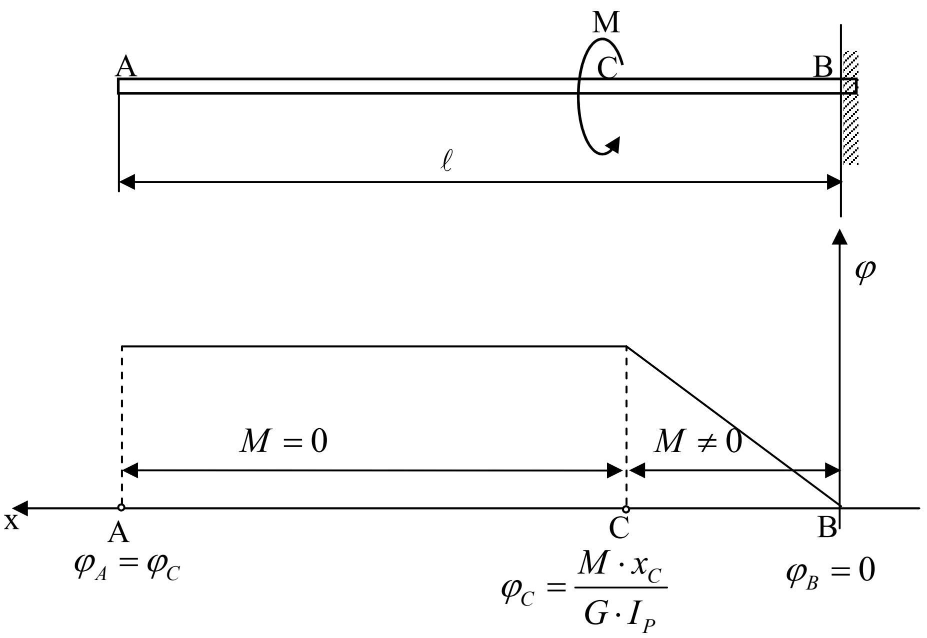
Uočimo da se ovaj izraz sastoji od dva člana, prvi član opisuje djelovanje momenta M_A u točki A na cijeloj duljini štapa ℓ, a drugi djelovanje momenta M_C na duljini $\ell - x$. Ta dva člana imaju suprotne predznake jer momenti uvijaju štap u suprotnim smjerovima. Ovdje predznak nema značenje kao kod aksijalno opterećenih štapova, ovdje on samo označava suprotne smjerove djelovanja momenata. Također uočimo nešto što je očito, a to je da momenta M_A djeluje na cijeloj duljini štapa ℓ, dok moment M_C djeluje između točaka B i C, a između točaka A i C ne djeluje.

Kao komentar prikažimo grafički ovisnost kutne deformacije o položaju točke u kojoj djeluje moment kao što smo to napravili kod aksijalno opterećenih štapova.

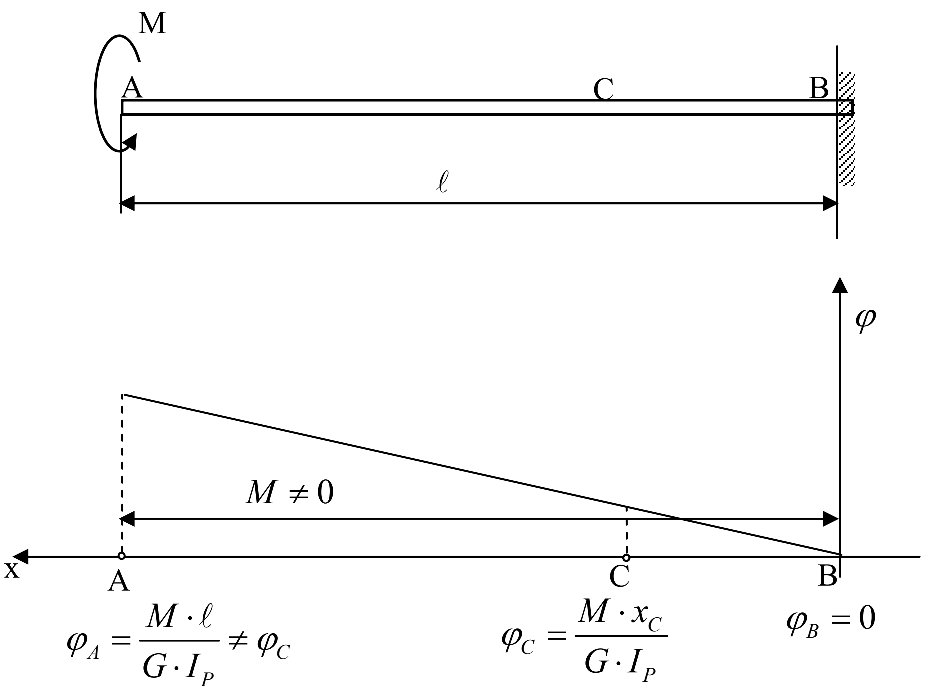
Prva situacija je kada moment djeluje između krajeva štapa.
Prije toga napišimo opći izraz za zakret proizvoljne točke:

$$\varphi = \frac{M \cdot x}{G \cdot I_P} = k \cdot x$$

uz $\varphi = \dfrac{M}{G \cdot I_P} = konst.$

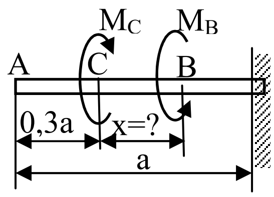


I druga situacija kada moment pomaknemo u točku A.



Uočite sami sličnosti s onime što je izneseno u poglavlju o aksijalno opterećenim štapovima, imajući naravno stalno u vidu da se radi o dva potpuno različita tipa opterećenja štapova, ali da ipak postoji analogija u pristupu problemu, rješavanju i dobivenim rezultatima.

Zadatak 2. Na štap AB, promjera d, djeluju momenti u točkama B i C. Koliko iznosi udaljenost x između točaka B i C ako je poznat zakret točke A φ_A? Koliki su tada zakreti točaka B i C? Zadano je: φ_A=+0,8°, M_B=85Nm, M_C=110Nm, a=670mm, d=20mm, G=80GPa. Napomena: predznak + definiran je smjerom djelovanja momenta M_C.



U tekstu je definiran pozitivni smjer djelovanja momenta što je bitno zbog zadanog predznaka zakreta točke A. to znači da će točka biti zakrenuta u smjeru djelovanja momenta M_C.
Riješimo sada zadatak i napišimo izraz za zakret točke A.

$$\varphi_A = \frac{M_C \cdot (a - 0{,}3 \cdot a)}{G \cdot I_P} - \frac{M_B \cdot (0{,}7 \cdot a - x)}{G \cdot I_P}$$

odavde je x=68,48mm.

Primijetimo da moment moment M_C djeluje između čvrste točke (zida) i točke C, a moment M_B između čvrste točke i točke C.

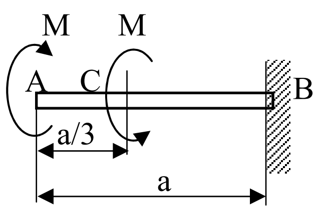
Zakret točke B je:

$$\varphi_A = \frac{M_C \cdot (a - 0{,}3 \cdot a - x)}{G \cdot I_P} - \frac{M_B \cdot (a - 0{,}3 \cdot a - x)}{G \cdot I_P} = \frac{(M_C - M_B) \cdot (0{,}7 \cdot a - x)}{G \cdot I_P} = 0{,}007968 rad \triangleq 0{,}46°$$

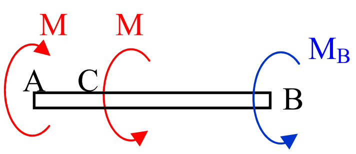
dok je zakret točke C jednak zakretu točke A tj.

$$\varphi_C = \varphi_A$$

Zadatak 3. Štap AB, okruglog poprečnog presjeka polumjera r, čvrsto je uležišten u točki B i opterećen je momentima M u točkama A i C. Izračunajte promjer štapa da zakret točke A ne bi bio veći od φ_A?. Koliki je tada zakret točke C? Zadano je: M=1500Nm, a=0,6m, G=80GPa, φ_A=0,9°.



Iz slike je vidljivo da momenti M djeluju u točkama A i C, a kao posljedica njihovog djelovanja u točki B pojavljuje se reaktivni moment M_B što je lako dokazati primjenom znanja stečenih u poglavlju „Oslobađanje tijela veza.“ Grafički predočeno to izgleda ovako:



U ovom tipu zadataka u pravilu ne moramo računati iznos reaktivnog momenta iako prethodnu činjenicu treba uvijek imati na umu.
Djelovanje momenata izaziva zakret svih točaka štapa u odnosu na čvrsti oslonac. Zakret nepomične točke, ovdje točke B, jednak je nuli!

Zakret točke A računa se prema izrazu:

$$\varphi_A = \frac{M \cdot a}{G \cdot I_P} - \frac{M \cdot 2 \cdot a}{3 \cdot G \cdot I_P} = \frac{M \cdot a}{3 \cdot G \cdot I_P}$$

Komentar: zakret φ_A točke A sastoji se od dva člana, prvi član govori o zakretu koji uzrokuje djelovanje momenta M u točki A, a drugi član govori o zakretu koji uzrokuje moment M koji djeluje u točki C. Obzirom da ova dva momenta imaju suprotnu orijentaciju to je u ovom izrazu predočeno suprotnim predznacima. Sami predznaci (pozitivno/negativno) nemaju nikakav fizikalni smisao kao što je to bilo kod aksijalno opterećenih štapova. Moment koji djeluje u točki A djeluje na cijeloj duljini štapa a i to računajući od čvrste točke B, dok moment koji djeluje u točki C djeluje samo na duljini od čvrste točke B do točke C (0,7·a), ali sve točke koje se nalaze iza točke C pa sve do točke A imaju isti zakret jednak onome u točki C. Zakreti prouzročeni djelovanjem momenta na opisani način se zbrajaju, uvažavajući njihov predznak. To se naziva princip superpozicije.

Da bismo izračunali traženi promjer d štapa iz gornjeg izraza potrebno je izraziti polarni moment tromosti I_P:

$$I_P = \frac{d^4 \cdot \pi}{32}$$

i preračunati zakret točke A iz stupnjeva u radijane prema relaciji:

$$180° = \pi \cdot rad \quad \Rightarrow \qquad 1° = \frac{\pi}{180} \cdot rad$$

Množenjem lijeve i desne strane s 0,9 dobiva se zakret točke A u radijanima

$$\widehat{\varphi}_A = 0,0157 rad$$

Uvrštavanjem ove vrijednosti zajedno s izrazom za polarni moment tromosti u polazni izraz za zakret φ_A točke A može se izračunati vrijednost promjera štapa d:

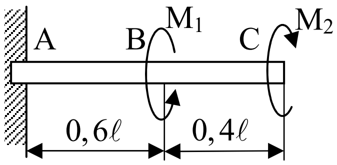
$$d = \sqrt[4]{\frac{9,6 \cdot M \cdot a}{G \cdot \pi \cdot \varphi_A}} = 38,47 mm$$

Naposljetku, zakret točke C računa se prema izrazu:

$$\varphi_C = \frac{M \cdot 2 \cdot a}{3 \cdot G \cdot I_P} - \frac{M \cdot 2 \cdot a}{3 \cdot G \cdot I_P} = 0$$

Prvi član predstavlja djelovanje momenta M u točki A s time da se sada gleda njegov utjecaj u točki C, a to je udaljenost 0,7·a od točke B, a drugi član predstavlja utjecaj momenta M koji djeluje u točki C koja se također nalazi na udaljenosti 0,7·a od točke B.

Zadatak 4. Puni štap promjera d, uležišten u točki A, opterećen je momentima uvijanja u točkama B i C. Odredite omjer momenata M_1 i M_2 da zakret točke C bude $\varphi_C=0°$. Koliki je tada zakret φ_B točke B u stupnjevima i radijanima? Zadano je: M_1=0,15kNm, d=20mm, ℓ=0,4m, G=80GPa.



Zakret točke C računa se prema izrazu:

$$\varphi_C = \frac{M_1 \cdot 0,6 \cdot \ell}{G \cdot I_P} - \frac{M_2 \cdot \ell}{G \cdot I_P} = 0$$

član $\frac{\ell}{G \cdot I_P}$ može se pokratiti u oba pribrojnika pa se dobije traženi omjer momenata:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{1}{0,6} = 1,67$$

Uz zadanu vrijednost momenta M_1 možemo izračunati vrijednost momenta M_2 =0,25Nm. Zakret točke B izračunat ćemo iz izraza:

$$\varphi_B = \frac{M_1 \cdot 0,6 \cdot \ell}{G \cdot I_P} - \frac{M_2 \cdot 0,6 \cdot \ell}{G \cdot I_P} = \frac{0,6 \cdot \ell}{G \cdot I_P} \cdot \left(M_1 - M_2\right)$$

uz $I_P = \frac{d^4 \cdot \pi}{32} = 15708,0 mm^4$

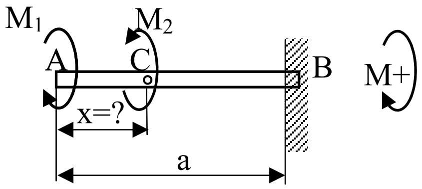
$\overset{\frown}{\varphi}_B = 0,01459 rad$

Ovu vrijednost pretvorit ćemo u stupnjeve korištenjem poznate relacije

$180° = \pi \cdot rad \Rightarrow \qquad \frac{180°}{\pi} = 1 rad$ pa je

$\varphi_B = 0,657°$.

Zadatak 5. Štap AB, okruglog poprečnog presjeka promjera d, opterećen je momentima uvijanja M_1 i M_2 u točkama A i C. Odredite udaljenost x između točaka A i C da bi zakret točke A bio φ_A. Koliki je tada zakret točke C? Zadano je: M_1=25Nm, M_2=21Nm, φ_A=0,3°(+), d=20mm, G=80GPa, a=500mm.



Komentar: zadani zakret φ_A točke A je pozitivan u smislu kako je zadan pozitivan predznak moneta uvijanja. Već je prije rečeno da kod uvijanja predznak nema nikakav fizikalni smisao kao što je to slučaj kod aksijalno opterećenih štapova (vlak/tlak), pa je ovaj pozitivni predznak posljedica toga što je pozitivan član u izrazu za zakret točke A veći od negativnog člana na što treba paziti prilikom postavljanja izraza.

Zakret točke A je:

$$\varphi_A = \frac{M_1 \cdot a}{G \cdot I_P} - \frac{M_2 \cdot (a-x)}{G \cdot I_P}$$

uz zadani zakret preračunat u radijane, kako je već pokazano, $\widehat{\varphi}_A = 0,005236 rad$ i polarni moment tromosti:

$$I_P = \frac{d^4 \cdot \pi}{32} = 15708,0 mm^4$$

može se izračunati vrijednost x kako slijedi:

$$x = a \cdot \left(1 - \frac{M_1}{M_2}\right) + \varphi_A \cdot \frac{G \cdot I_P}{M_2}$$

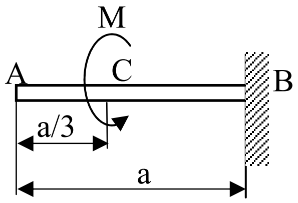
$$x = 218,1 mm$$

Preostaje za izračunati zakret točke C za upravo izračunati x:

$$\varphi_C = \frac{M_1 \cdot (a-x)}{G \cdot I_P} - \frac{M_2 \cdot (a-x)}{G \cdot I_P} = \frac{(M_1 - M_2) \cdot (a-x)}{G \cdot I_P}$$

$$\widehat{\varphi}_C = 0,000897 rad \qquad (\varphi_C = 0,0514^\circ)$$

Zadatak 6. U štapu AB, okruglog poprečnog presjeka polumjera r, opterećenom zakretnim momentom M u točki C izmjereno je naprezanje τ. Koliko je polumjer r štapa? Koliki je zakret točke A? Do kojeg iznosa se smije povećati zakretni moment da se u štapu ne bi prekoračilo dopušteno naprezanje uz ostale uvjete nepromijenjene? Zadano je: M=85Nm, τ=45MPa, τ_{DOP}=75MPa, G=80GPa, a=800mm.



Tangencijalno naprezanje u štapu računa se prema izrazu:

$$\tau = \frac{M}{w_P} = 45 MPa$$

gdje je w_P polarni moment tromosti prema izrazu:

$$w_P = \frac{I_P}{r_{\max}} = \frac{\frac{d^4 \cdot \pi}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{d^3 \cdot \pi}{16} = \frac{(2 \cdot r)^3 \cdot \pi}{16} = \frac{r^3 \cdot \pi}{2}$$

r_{max} predstavlja maksimalnu udaljenost točke presjeka od središta zakrivljenosti presjeka i u toj točki će nastupiti maksimalni iznos naprezanja. Ovdje je $r_{\max} = \frac{d}{2} = r$.

Uvrštavanjem izraza za w_P u izraz za naprezanje τ dobiva se izraz iz kojeg je moguće izračunati traženi promjer d:

$$\tau = \frac{2 \cdot M}{r^3 \cdot \pi} \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot M}{\tau \cdot \pi}}$$

$$r = 10,6mm$$

Zakret točke A iznosi:

$$\varphi_A = \frac{M \cdot \frac{2}{3} \cdot a}{G \cdot I_P} = \varphi_C$$

uz $I_P = \dfrac{r^4 \cdot \pi}{2} = 19830,9mm^4$

$\widehat{\varphi}_A = 0,0286rad \qquad (\varphi_A = 1,64°)$

Komentar: primijetimo da moment M uvija štap od točke C do uležištenja, dok je od točke A do točke C štap neopterećen odn. unutarnji moment jednak je nuli pa se zakret točke C prenosi u jednakom iznosu na sve točke neopterećenog dijela do točke, slično kao što je bilo s pomakom točke neopterećenog dijela štapa kod aksijalno opterećenih štapova.

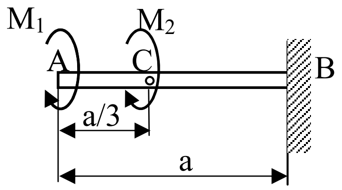
Iznos do kojeg se moment smije povećati da se ne prekorači uvjet dopuštenog naprezanja je:

$$\tau = \frac{M'}{w_P} \le \tau_{DOP} \qquad \Rightarrow \qquad M' = w_P \cdot \tau_{DOP}$$

uz $w_P = 1870,8mm^3$

$M' = 141,7Nm$.

Zadatak 7. Štap AB, okruglog poprečnog presjeka promjera d, opterećen je momentima uvijanja M_1 i M_2 u točkama A i C. Koliki su zakreti točaka A i C? Izračunajte novi promjer štapa da bi još bio zadovoljen uvjet dopuštenog naprezanja? Zadano je: M_1=25Nm, M_2=14Nm, d=20mm, τ_{DOP}=45MPa, G=80GPa, a=500mm.



Zakreti točaka A i C su:

$$\varphi_A = \frac{M_1 \cdot a}{G \cdot I_P} + \frac{M_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot a}{G \cdot I_P} = \frac{a}{G \cdot I_P}\left(M_1 + \frac{2}{3} \cdot M_2\right)$$

$$\varphi_C = \frac{M_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot a}{G \cdot I_P} + \frac{M_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot a}{G \cdot I_P} = \frac{2 \cdot a}{3 \cdot G \cdot I_P}\left(M_1 + M_2\right)$$

uz $I_P = \dfrac{d^4 \cdot \pi}{32} = 15708,0mm^4$

$\widehat{\varphi}_A = 0,013661 rad \qquad (\varphi_A = 0,783°)$

$\widehat{\varphi}_C = 0,0135 rad \qquad (\varphi_C = 0,593°)$

Naprezanje u štapu, uvažavajući uvjet dopuštenog naprezanja, jednako je:

$$\tau = \frac{M_1 + M_2}{w_P} \leq \tau_{DOP}$$

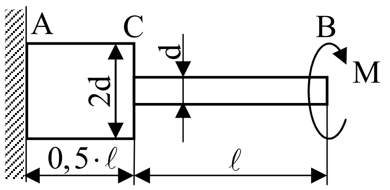
uz $w_P = \dfrac{d'^3 \cdot \pi}{16}$

$$d' = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot (M_1 + M_2)}{\tau_{DOP} \cdot \pi}}$$

$$d' = 16,4 mm$$

Komentar: momenti M_1 i M_2 uvijaju štap u istom smjeru pa se njihovi iznosi zbrajaju (superponiraju). Maksimalno naprezanje pojavit će se na mjestu (potezu) gdje je iznos unutarnjeg momenta najveći a to je između točaka C i B i jednak je zbroju M_1+M_2. Između točaka A i C unutarnji moment jednak je momentu M_1 jer iza točke c više ne djeluje moment M_2.

Zadatak 8. Štap AB opterećen je momentom uvijanja M u točki B. Odredite iznos promjera d da zakret točke B ne bi bio veći od 0,25°. Koliki je zakret točke C i koliko je naprezanje u štapu? Zadano je: M=25Nm, l=0,5m, G=80GPa.



Komentar: rješenju zadatka se pristupa na jednak način kao i prije, s tom razlikom što se zbog različitih promjera štapa mijenja polarni moment tromosti odn. otpora.

Zakret točke B računa se prema:

$$\varphi_B = \frac{M \cdot 0,5 \cdot \ell}{G \cdot I_{P1}} + \frac{M \cdot \ell}{G \cdot I_{P2}}$$

Nadalje je:

$$I_{P1} = \frac{(2 \cdot d)^4 \cdot \pi}{32} = \frac{d^4 \cdot \pi}{2}$$

$$I_{P2} = \frac{d^4 \cdot \pi}{32}$$

što uvršteno u polazni izraz daje:

$$\varphi_B = \frac{2 \cdot M \cdot 0,5 \cdot \ell}{G \cdot d^4} + \frac{32 \cdot M \cdot \ell}{G \cdot d^4} = \frac{33 \cdot M \cdot \ell}{G \cdot d^4}$$

iz čega slijedi:

$$d = \sqrt[4]{\frac{33 \cdot M \cdot \ell}{G \cdot \pi \cdot \varphi_B}}$$

uz zadani zakret točke B izražen u radijanima $\widehat{\varphi}_B = 0,004363 rad$ promjer d je:

$$d = 24,77 mm$$

Zakret točke C je:

$$\varphi_C = \frac{M \cdot 0,5 \cdot \ell}{G \cdot I_{P1}}$$

uz $I_{P1} = \dfrac{d^4 \cdot \pi}{2} = 590906,5 mm^4$

$$\widehat{\varphi}_C = 0,0001322 rad \quad \varphi_C = 0,00758^\circ$$

Naprezanje nije jednako u cijelom štapu jer se mijenja promjer štapa pa je:

$$\tau_1 = \frac{M}{w_{P1}} = \frac{2 \cdot M}{d^3 \cdot \pi}$$

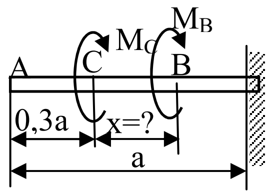
$$\tau_2 = \frac{M}{w_{P2}} = \frac{16 \cdot M}{d^3 \cdot \pi}$$

jer je $w_{P1} = \dfrac{I_{P1}}{d}$ ($r_{\max 1} = d$) i $w_{P2} = \dfrac{I_{P2}}{\frac{d}{2}}$ ($r_{\max 2} = \dfrac{d}{2}$). Slijedi:

$$\tau_1 = 1,05 MPa \text{ i } \tau_2 = 8,4 MPa$$

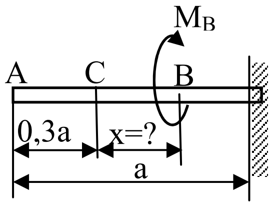
4.2. Primjeri za samostalno rješavanje

1. Na štap AB, promjera d, djeluju momenti u točkama B i C. Koliko iznosi udaljenost x između točaka B i C ako je poznat zakret točke A φ_A? Koliki su tada zakreti točaka B i C? Zadano je: φ_A=0,8°, M_B=85Nm, M_C=110Nm, a=670mm, d=30mm, G=80GPa.



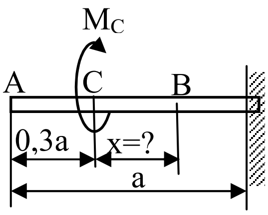
Rješenje: x=31,1 mm, $\varphi_C=\varphi_A$, φ_B=0,0134 rad (0,769°)

2. Na štap AB, promjera d, djeluje moment u točki B. Koliko iznosi udaljenost x između točaka B i C ako je poznat zakret točke C φ_C? Koliki su tada zakreti točaka A i B? Zadano je: φ_C=0,5°, M_B=30Nm, a=670mm, d=20mm, G=80GPa.



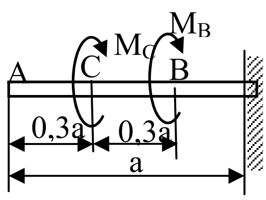
Rješenje: x=103,5 mm, $\varphi_A=\varphi_B=\varphi_C$.

3. Na štap AB, promjera d, djeluje moment u točki C (slika 2.). Koliko iznosi udaljenost x između točaka B i C ako je poznat zakret točke B φ_B? Koliki su tada zakreti točaka A i C? Da li je naprezanje u cijelom štapu jednako? Potkrijepite računom! Zadano je: φ_B=0,5°, M_C=30Nm, a=670mm, d=20mm, G=80GPa.



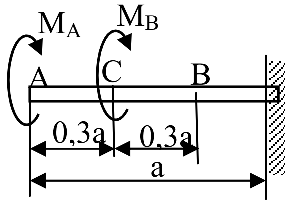
Rješenje: x=103,3 mm, $\varphi_A=\varphi_C$=0,01086 rad (0,622°), $\tau_{A\text{-}C}$=0, $\tau_{C\text{-}B}$=19,1 MPa.

4. Na štap AB, promjera d, djeluju momenti u točkama B i C. Koliko iznosi moment M_B ako je poznat zakret točke A φ_A? Koliki je tada zakret točke B φ_B? Zadano je: φ_A=0,8°, M_C=170Nm, a=670mm, d=30mm, G=80GPa.



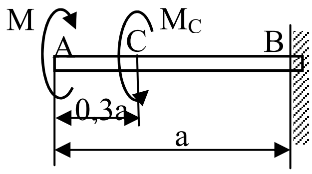
Rješenje: M_B=33,94 Nm, φ_B=0,00859 rad (0,492°).

5. Na štap AB, okruglog poprečnog presjeka, djeluju momenti u točkama A i C. Koliki je zakret točke B φ_B ako je poznat zakret točke C φ_C. Zadano je: M_B=600Nm, M_A=170Nm, φ_C=0,035rad, promjer štapa d=30mm, G=80GPa.



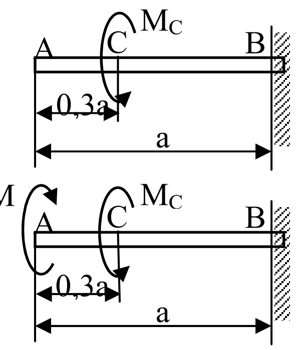
Rješenje: φ_B=0,0201 rad (1,15°).

6. Na štap AB, okruglog poprečnog presjeka, djeluju momenti u točkama A i C. Koliki su zakreti φ_A i φ_C točaka A i C. Koliko treba iznositi moment M u točki A da bi zakret φ_C točke C bio jednak nuli (φ_C=0). Zadano je: M=900Nm, M_C=170Nm, a=670mm, promjer štapa d=30mm, G=80GPa.



Rješenje: φ_A=0,08225 rad (4,71°), φ_C=0,05382 rad (3,08°), M=M_C=170 Nm (φ_C=0).

7. Kada na štap AB, okruglog poprečnog presjeka, djeluje samo moment M_C u točki C zakret točke A iznosi φ_A (slika a.). Koliki je zakret točke C (u stupnjevima i radijanima) ako se na kraj štapa (točka A) doda moment M (slika b.). Zadano je: M=900Nm, M_C=170Nm, φ_A =0,3°, promjer štapa d=30mm, G=80GPa.

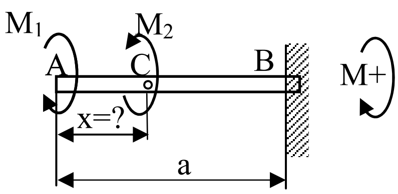


Slika a.

Slika b.

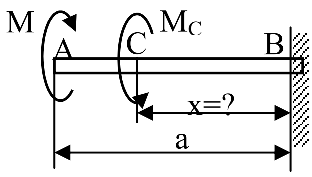
Rješenje: φ_C=0,0225 rad (1,29°).

8. Štap AB, okruglog poprečnog presjeka promjera d, opterećen je momentima uvijanja M_1 i M_2 u točkama A i C. Odredite udaljenost x između točaka A i C da bi zakret točke A bio φ_A. Koliki je tada zakret točke C? Zadano je: M_1=25Nm, M_2=21Nm, φ_A=0,3°(+), d=20mm, G=80GPa, a=500mm.



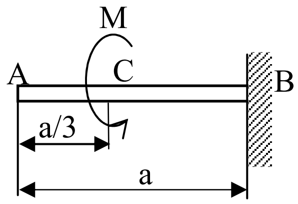
Rješenje: x=218,1 mm, φ_C=0,00524 rad (0,3°).

9. Štap AB, okruglog poprečnog presjeka, opterećen je momentima uvijanja u točkama A i C. Na kojoj udaljenosti x od točke B se nalazi točka C ako je poznat zakret φ_A točke A. Koliki je tada zakret točke C (u stupnjevima i radijanima). Zadano je: M=900Nm, M_C=300Nm, φ_A =1,1°(u smjeru momenta M), a=0,6m, promjer štapa d=40mm, G=80GPa.



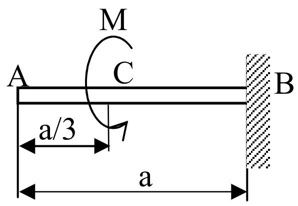
Rješenje: x=513,3 mm, φ_C=0,0153 rad (0,878°).

10. Na štap AB okruglog poprečnog presjeka, polumjera r, djeluje zakretni moment M u točki C. Koliko mora biti polumjer štapa da se ne bi prekoračilo dopušteno naprezanje? Koliki su zakreti točaka A i C? Zadano je: M=1,25kNm, G=80GPa, a=800mm, τ_{DOP}=75MPa.



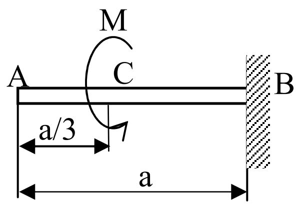
Rješenje: r=21,98 mm, φ_A=φ_C=0,023 rad (1,32°).

11. Na štap AB okruglog poprečnog presjeka, polumjera r, djeluje zakretni moment M u točki C. Koliko će uslijed toga nastupiti naprezanje u štapu i između kojih točaka se ono pojavljuje? Koliki su zakreti točaka A i C? Zadano je: M=1,25kNm, G=80GPa, a=800mm, r=20mm.



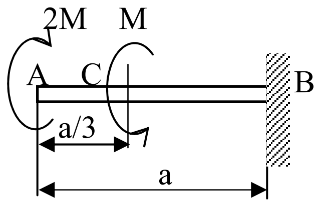
Rješenje: τ=99,4 MPa (između točaka B i C), φ_A=φ_C=0,03316 rad (1,9°).

12. U štapu AB, okruglog poprečnog presjeka polumjera r, opterećenom zakretnim momentom u točki C izmjereno je naprezanje τ. Koliko iznosi zakret točke A? Koliki bi bio zakret iste točke ako bi se moment premjestio u točku A? Zadano je: τ=45MPa, G=80GPa, a=800mm, r=20mm.



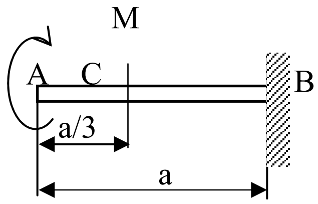
Rješenje: φ_A=0,015 rad (0,9°), φ_A=0,0225 rad (1,3°) (M u točki A).

13. Štap AB, okruglog poprečnog presjeka polumjera r, čvrsto je uležišten u točki B i opterećen je momentima u točki A i C. Izračunajte promjer štapa da zakret točke A ne bi bio veći od φ_A?. Koliki je tada zakret točke C? Zadano je: M=1500Nm, a=0,6m, G=80GPa, φ_A=0,9°.



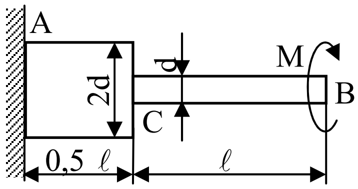
Rješenje: d=2r=55,8 mm, μ=0,184, φ_C=0,00785 rad (0,450°).

14. Štap AB, okruglog poprečnog presjeka polumjera r, čvrsto je uležišten u točki B i opterećen je momentom M u točki A. Koliki je iznos momenta M da bi bio zadovoljen uvjet dopuštenog naprezanja. Koliki su tada zakreti točaka A i C? Zadano je: τ_{DOP}=80MPa, a=0,6m, G=80GPa, r=10mm.



Rješenje: M=125,7 Nm, φ_A=0,060 rad (3,44°), φ_C=0,045 rad (2,29°).

15. Osovina je opterećena momentom uvijanja u točki B. Odredite iznos momenta M da zakret točke B ne bi bio veći od 0,25°. Koliki je tada zakret točke C φ_C? Zadano je: d=10mm, ℓ=0,5m, G=80GPa.



Rješenje: M=0,457 Nm, φ_C=0,0000909 rad (0,0052°).

5. Savijanje

5.1. Riješeni primjeri

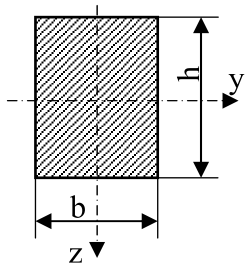
U nastavku su obrađene tri tipične i najjednostavnije situacije opterećenja grede (nosača) savijanjem. To je opterećenje koncentriranom silom, momentom i kontinuiranim opterećenjem. Sve grede su istog izgleda i oslonjene su na dva oslonca, pomični i nepomični. Oslonci se nalaze na krajevima grede a ponašaju se isto onako kako je objašnjeno u prvom poglavlju „Pravilo izolacije.“ Ove tri situacije bit će jedine koje će se pojavljivati u zadacima, jedino što se može promijeniti su zadani brojevi, ali uz prikazani postupak lako je doći do novih rješenja.
Kao posljedica vanjskih opterećenja u unutarnjim presjecima pojavljuju se unutarnje sile i momenti koji uzrokuju naprezanje. Te unutarnje sile i momente moguće je grafički prikazati kako je to ovdje i učinjeno. Kako se došlo do toga, zbog kratkog vremena, nije ovdje objašnjeno. Prikazani dijagrami su dijagram unutarnjih sila (Q dijagram) i dijagram unutarnjih momenata (M dijagram). Ovaj potonji nam je važan za računanje naprezanja prema općem izrazu za naprezanje:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} \cdot z \qquad [\mathrm{MPa}] \qquad (1)$$

gdje je M_y [Nm] moment savijanja očitan iz M dijagrama ili izračunat kako je prikazano, a I_y moment tromosti [m^4]. Obratite pozornost na odabrani koordinatni sustav, kojem os y gleda okomito iz papira prema vama. To je ujedno indeks u prethodno opisanom momentu M_y i momentu tromosti I_y. Slovo z označava vrijednost koordinate z prma zadanom koordinatnom sustavu tj. udaljenost točke presjeka od neutralne osi tj. vrijednosti nula. Moment otpora w_y dobiva se prema izrazu:

$$w_y = \frac{I_y}{z_{\max}} \qquad (2)$$

gdje z_{max} predstavlja maksimalnu vrijednost koordinate z tj. točku presjeka koja je najudaljenija od neutralne osi. Za gredu pravokutnog poprečnog presjeka to izgleda ovako.



Moment tromosti i momenta otpora su:

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} \qquad (3)$$

$$\text{uz } z_{\max} = \frac{h}{2} \quad \Rightarrow \quad w_y = \frac{b \cdot h^2}{6} \qquad (4)$$

Uvrštavanjem izraza (2) u izraz (1) dobijemo sljedeći izraz.

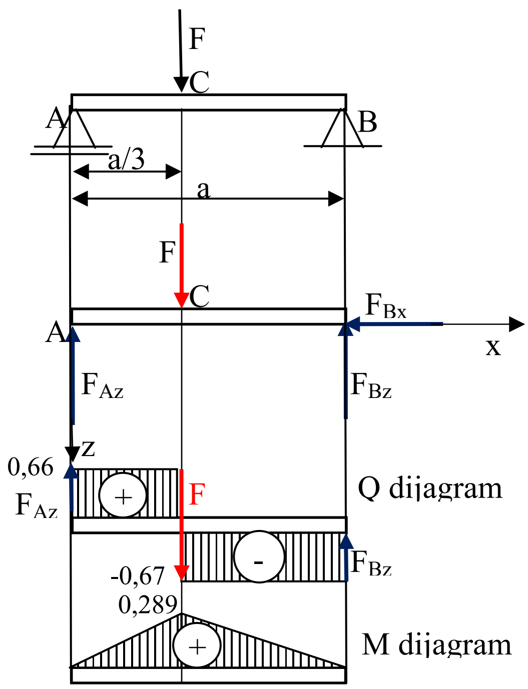
$$\sigma = \frac{M_y}{w_y} \qquad (5)$$

a uvrštavanjem izraza (4) u izraz (5) za konkretni poprečni presjek prikazan slikom dobije se:

$$\sigma = \frac{6 \cdot M_y}{b \cdot h^2} \qquad (6)$$

Ovaj izraz nam omogućuje da izračunamo najveće naprezanje u određenom presjeku, a ako u brojnik uvrstimo iznos maksimalnog momenta kojeg očitamo iz M dijagrama dobit ćemo maksimalno naprezanje u greda. Sa stanovišta proračuna to nam je najinteresantnija veličina.

Zadatak 1. Greda je opterećena koncentriranom silom F. Koliko iznosi maksimalno naprezanje u gredi ako je poprečni presjek grede pravokutnik postavljen po visini dimenzije bxh (širina puta visina)? Zadano je: F=1,32kN, a=1,3m, b=80mm, h=120mm.



Zadatak počinjemo oslobađanjem tijela veza kao što smo prije naučili. Rješenja su:

$$\Sigma F_z = 0 \qquad -F_{Az} + F + F_{Bz} = 0$$

$$\Sigma M_B = 0 \qquad -F_{Az} \cdot a + F \cdot \frac{2 \cdot a}{3} = 0$$

Iz ove dvije jednadžbe dobiju se rješenja:
F_{Az}=0,66kN,
F_{Bz}=0,327kN,
F_{Bx}=0

Kao rezultat vanjskih opterećenja, ovdje su to aktivna sila F i sile reakcija F_{Az}, F_{Bz} i F_{Bx} (=0), u gredi su se pojavile unutarnje sile i momenti koji su prikazani odgovarajućim Q i M dijagramima koje nećemo učiti crtati. Zadaci koji će se zadavati kod provjere znanja imat će kvalitativno iste dijagrame, a mijenjat će se samo brojevi, pa je na temelju prikazanog postupka moguće doći do novih vrijednosti dijagrama.
Za računanje maksimalnog naprezanja potrebna nam je maksimalna vrijednost momenta koju očitamo iz M-dijagrama. ta se vrijednost uvijek pojavljuje u točki gdje djeluje koncentrirana sila (F).
Kako smo izračunali tu vrijednost?
Tako što smo izračunali vrijednost momenta u točki C kao umnožak jedne ili druge reakcije i njihovih udaljenosti od točke C. vrijednost mora biti ista. To izgleda ovako:

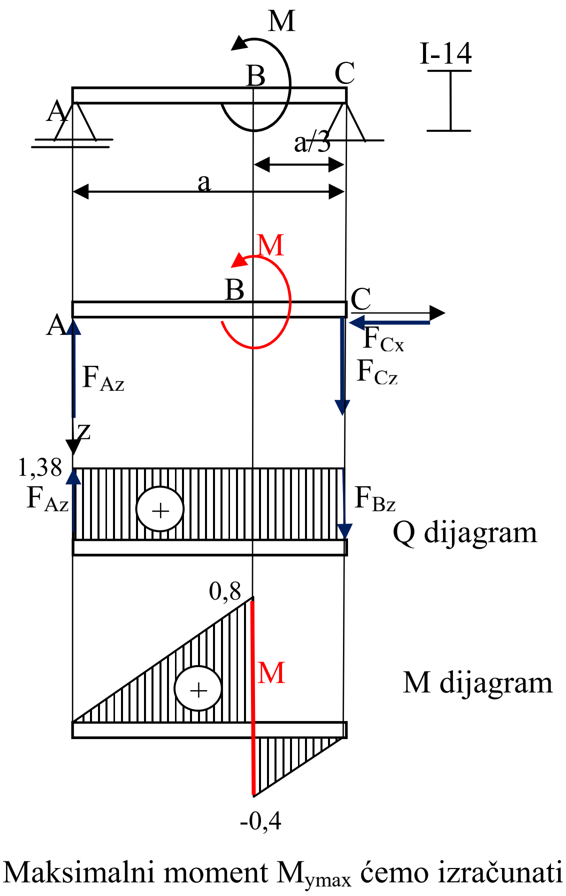
$$M_{y\max} = F_{Az} \cdot \frac{a}{3} = F_{Cz} \cdot \frac{2 \cdot a}{3} = 0,28kNm$$

Prema tome u točki C nastupa maksimalno naprezanje i koristeći izraz (6) lako se izračuna iznos:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{y\max}}{w_y} = \frac{0,289 \cdot 10^6}{\frac{80 \cdot 120^2}{6}} = 1,51 MPa$$

Za iznos momenta M_y uzima se po apsolutnoj vrijednosti najveću vrijednost iz M dijagrama. To ovdje nije problem jer je cijeli dijagram pozitivan.
Vrijednost naprezanja vrlo je mala što znači da je poprečni presjek grede puno prevelik tj. poprečni presjek je loše iskorišten. Greda bi mogla biti manjih dimenzija.
Napomenimo da korištenjem općeg izraza za naprezanje možemo izračunati naprezanje u bilo kojoj točki presjeka!
Ponovimo da nam je u praksi uvijek najinteresantnije mjesto gdje naprezanje postiže svoj maksimum.

Zadatak 2. Greda je opterećena momentom savijanja M. Koliko iznosi maksimalno naprezanje u gredi ako je poprečni presjek grede standardni profil I-14 okrenut prema slici? Zadano je: M=1,2kNm, a=1,3m. Moment otpora profila I-14 očitajte iz priložene tablice profila.



Zadatak počinjemo oslobađanjem tijela veza kao što smo prije naučili. Rješenja su:

$$\Sigma F_z = 0 \qquad -F_{Az} + F_{Cz} = 0$$

$$\Sigma M_B = 0 \qquad -F_{Az} \cdot a + M = 0$$

Iz ove dvije jednadžbe dobiju se rješenja:
F_{Az}= F_{Cz}=0,92kN,
F_{Cx}=0

Maksimalni moment M_{ymax} ćemo izračunati tako da izračunamo momente reaktivnih sila oko točke u kojoj djeluje moment M te ih usporedimo. Zbog jednostavnosti ćemo izračuanti apsolutne vrijednosti momenata savijanja::

$$|M_{yA}| = F_{Az} \cdot \frac{2}{3} \cdot a = 0,92kN \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,3m = 0,8kNm \text{ i}$$

$$|M_{yC}| = F_{Cz} \cdot \frac{2}{3} \cdot a = 0,92kN \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,3m = 0,4kNm$$

Vidimo da je:

$$\left|M_{yA}\right| > \left|M_{yC}\right|$$

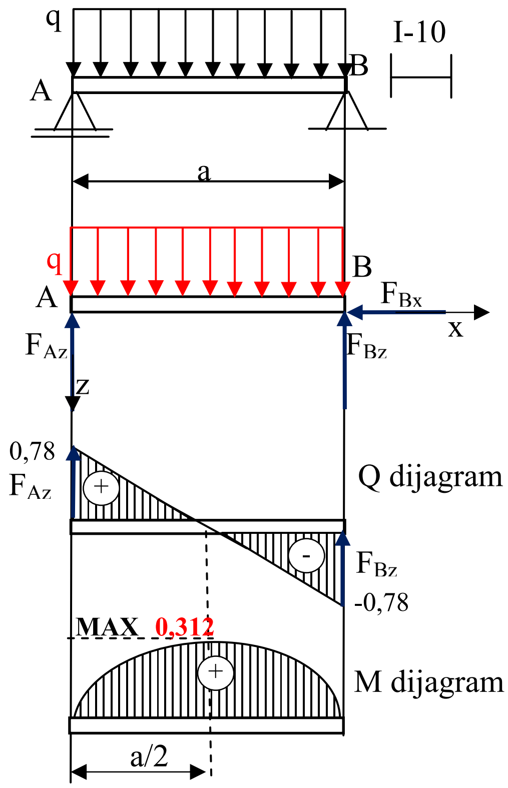
pa možemo zaključiti da je maksimalni iznos momenta:

$$\left|M_{yA}\right| = M_{y\max} = 0,8kNm$$

U tablici u nastavku nađimo redak I-14, sve podatke o tom profilu možemo očitati u tom retku. Pripazite na koordinatne osi jer se ne podudaraju s našim koordinatnim sustavom. O kojim osima se radi vidjet ćete usporedbom slika kako je profil postavljen. U konkretnom slučaju vrijednost je $w_y=81,9\cdot10^3 mm^3$. Primijetite da os x u tablici odgovara našoj osi y!
Naposljetku iznos naprezanja je:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{y\max}}{w_y} = \frac{0,8\cdot10^6}{81,9\cdot10^3} = 9,76MPa$$

Zadatak 3. Greda je opterećena kontinuiranim opterećenjem q. Koliko iznosi maksimalno naprezanje u gredi ako je poprečni presjek grede standardni profil I-10 položen po visini (v. sliku)? Zadano je: q=1,2kN/m, a=1,3m. Moment otpora profila I-10 očitajte iz priložene tablice profila.



Zadatak počinjemo oslobađanjem tijela, ovdje malo detaljnije jer se od sada nismo susreli s pojmom kontinuiranog opterećenja q. Ta veličina ima jedinicu kN/m pa kada nam je poznato na kojoj duljini (metara) djeluje njen iznos ima jedinicu (k)N kao i sila. Pema svom djelovanju u unutarnjim presjecima razlikuje od sile.
Oslobodimo gredu veza i postavimo uvjete ravnoteže. Prije toga uočavamo odmah da je $F_{Cx}=0$

$$\Sigma F_z = 0 \qquad -F_{Az} - F_{Bz} + q\cdot a = 0$$

Uočimo novost, a to je djelovanje kontinuiranog opterećenja q (kN/m) na duljini a (m) što daje ekvivalentnu silu u N. Ovdje se to može poistovjetiti s djelovanjem koncentrirane sile F.

$$\Sigma M_A = 0 \qquad F_{Bz}\cdot a - q\cdot a\cdot\frac{1}{2}\cdot a = 0$$

Za moment što ga čini sila F_{Cz} oko točke A ne treba objašnjenja, pa pogledajmo kao djeluje kontinuirano opterećenje q. Ono djeluje na duljini a što daje iznos u (k)N i to je isti član kao u $\Sigma F_z = 0$ tj. $q\cdot a$. Tu ekvivalentnu silu treba pomnožiti krakom koji ćemo izračunati kao <u>udaljenost težišta pravokutnika</u> koji prikazuje kontinuirano opterećenje q od točke oko koje računamo momenta, ovdje je to točka A. To je član $\frac{1}{2}\cdot a$.

Iz uvjeta ravnoteže iznosi reakcija su:
$F_{Az}=F_{Bz}=0,78kN$

Karakteristično za ovu vrstu opterećenja je funkcijska ovisnost unutarnjeg momenta M_y o x u obliku polinoma drugog stupnja.
Uočimo da se između točaka A i B pojavila parabola (polinom) 2. stupnja kako je rečeno i da je između te dvije točke postigla i svoj maksimum i to točno na sredini grede (a/2).

Vrijednost maksimuma parabole tj. maksimalnog iznosa momenta između točaka A i B dobivamo kako slijedi:

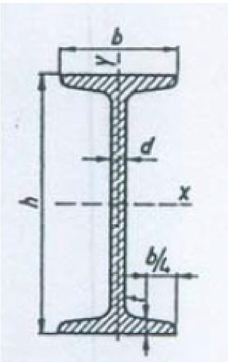
$$M_{y\max} = F_{Az} \cdot \frac{a}{2} - q \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} = 0,312 kNm$$

Izračunajmo sada naprezanje za profil I-10 koji je sada položen po visini kako je prikazano slikom.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{y\max}}{w_y} = \frac{0,312 \cdot 10^6}{4,88 \cdot 10^3} = 63,9 MPa$$

Maksimalni moment opet smo očitali iz M dijagrama, a vrijednost momenta otpora I-10 profila je ona za os y iz tablice jer je taj profil sada položen po visini ili možemo reći i polegnut.

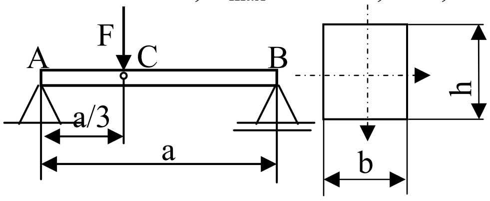
Tablica standardnih I profila (prema DIN 1025-1:1995-05)



Oznaka I	Dimenzije, mm h	b	d	t	Presjek S, mm^2	Dulj. masa, kg/m	Statičke veličine I_x	I_y	w_x	w_y
							$10^4 mm^4 (=cm^4)$		$10^3 mm^3 (=cm^3)$	
8	80	42	3,9	5,9	758	5,95	77,8	6,3	19,5	3,00
10	100	50	4,5	6,8	1060	8,32	171	12,2	34,2	4,88
12	120	58	5,1	7,7	1420	11,2	328	21,5	54,7	7,41
14	140	66	5,7	8,6	1830	14,4	573	35,2	81,9	10,7
16	160	74	6,3	9,5	2280	17,9	935	54,7	117	14,8
18	180	82	6,9	10,4	2790	21,9	1450	81,3	161	19,8
20	200	90	7,5	11,3	3350	26,3	2140	117	214	26,0
(22)	220	98	8,1	12,2	3960	31,1	3060	162	278	33,1
24	240	106	8,7	13,1	4610	38,2	4250	221	354	41,7
26	260	113	9,4	14,1	5340	41,9	5740	288	442	51,0
(28)	280	119	10,1	15,2	6110	48,0	7590	364	543	61,2
30	300	125	10,8	16,2	6910	54,2	9800	451	653	72,2
(32)	320	131	11,5	17,3	7780	61,1	12510	555	782	84,7
34	340	137	12,2	18,3	8680	68,1	15700	674	923	98,4
(36)	360	143	13,0	19,5	9710	76,2	19610	818	1090	114,4
(38)	380	149	13,7	20,5	10700	84,0	24010	975	1250	130,9
40	400	155	14,4	21,6	11800	92,6	29210	1160	1460	149,7

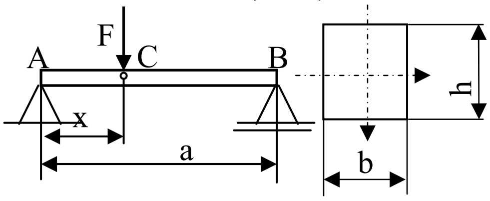
5.2. Primjeri za samostalno rješavanje

1. Na gredu djeluje sila F u točki C. Greda je pravokutnog poprečnog presjeka (bxh) okrenutog po visini (slika 1.) i u njoj je izmjereno maksimalno naprezanje σ_{max}. Koliko iznosi sila F kojom je greda opterećena? Koliko bi maksimalno naprezanje nastupilo u gredi kad bi se položila plještimice (na stranicu duljine h)? Zadano je: b=30mm, h=45mm, σ_{max}=65MPa, a=0,9m.



Rješenje: F=3290,6 N; σ'_{max}=97,5 MPa.

2. Na gredu djeluje sila F u točki C. Greda je pravokutnog poprečnog presjeka (bxh) okrenutog po visini (vidjeti sliku) i u njoj je izmjereno maksimalno naprezanje σ_{max}. Koliko iznosi širina brida b pravokutnika? Zadano je: x=250mm, F=1800N, h=35mm, σ_{max}=29 MPa, a=0,9 m.



Rješenje: 54,89 mm